

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ РЕАКТОРНОЙ УСТАНОВКИ ВВЭР-1000

Пухлий В. А. (СевГУ, Севастополь, Россия), Коган Е.А. (Московский Политех,
Москва, Россия), Мирошниченко С.Т. (СевГУ, Севастополь, Россия),
Пухлий К.В. (АО «Аэротекс», Москва, Россия)

Аннотация

Рассмотрены вопросы термоупругости гибов биметаллических трубопроводов атомной энергетики с учетом овализации поперечного сечения. Учтена зависимость физико-механических характеристик материала трубопроводов от температуры и от воздействия радиационного излучения. Приведен алгоритм аналитического решения краевой задачи Кармана для упругого гiba на основе модифицированного метода последовательных приближений.

Введение

Главные циркуляционные трубопроводы реактора ВВЭР-1000 предназначены для организации циркуляции теплоносителя к реактору и от реактора к парогенератору ПГВ-1000 по четырем петлям (рис.1).

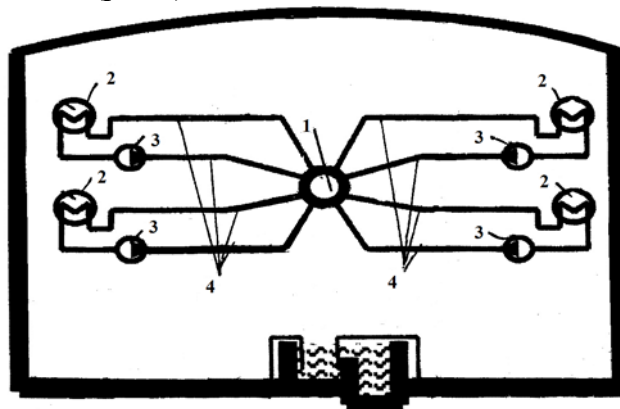


Рис.1. Схема главных циркуляционных трубопроводов реакторной установки ВВЭР-1000:
1 – реактор; 2 – парогенератор ПГВ-1000; 3 – главный циркуляционный насос ГЦН-195М;
4 – главные циркуляционные трубопроводы ДУ-850

Теплоноситель 1-го контура представляет собой чистую воду с растворенной в ней борной кислотой (H_3BO_3). Борная кислота с достаточно высокой концентрацией ($16 \text{ г } \text{H}_3\text{BO}_3 / 1 \text{ кг } \text{H}_2\text{O}$) используется для того, чтобы компенсировать избыточную способность к делению свежего ядерного топлива.

Вода в реактор поступает при давлении $P = 16 \text{ МПа}$ с температурой $T = 280^\circ\text{C}$. В активной зоне реактора вода нагревается до $T = 315^\circ\text{C}$ и далее направляется в парогенератор ПГВ-1000, где отдает тепло теплоносителю 2-го контура.

Вода 1-го контура при работе реактора приобретает высокую наведенную радиоактивность, даже если не происходит сверхнормативного нарушения герметичности оболочек ТВЭЛ, так как в воде практически всегда присутствуют примеси (шламы – продукты коррозии, эрозии, соли и т.п.), которые активируются в активной зоне.

Трубопроводы циркуляции теплоносителя ДУ-850 мм изготавливаются из низколегированной углеродистой стали перлитного класса 10ГН2МФА с плакированием внутренней поверхности трубопроводов нержавеющей сталью 08Х18Н10Г2Б.

Таким образом, трубопроводы АЭС работают в условиях сложного нагружения, обусловленного, прежде всего, воздействием внешних механических нагрузок, агрессивных сред, высокотемпературного нагрева [1, 2], радиационного облучения [3].

В разрабатываемых реакторах будущего в качестве теплоносителя используется вода при сверхкритических параметрах, жидкий гелий, а также жидкометаллические теплоносители, жидко-солевые теплоносители. Температура теплоносителей в этих реакторах достигает величины порядка $T = 1000^\circ\text{C}$. В результате температурные напряжения в сочетании с механическими напряжениями от силовых воздействий и радиационного облучения могут вызвать разрушение конструкции. Поэтому при уточненных расчетах напряженно-деформированного состояния и прочности силовых элементов конструкции реактора и ресурса центробежных насосов необходимо учитывать изменение механических и теплофизических характеристик материала: модуля упругости E и коэффициента линейного расширения α от координат и температуры $T = T(\alpha_1, \alpha_2, z)$ и радиационное облучение материала.

В предыдущей работе авторов [4] рассматривалась задача о напряженно-деформированном состоянии упругих гибов биметаллических трубопроводов гидроэнергетики при воздействии внутреннего давления (задача Кармана). В настоящей работе подход, разработанный авторами ранее, распространяется на задачу термоупругости гибов биметаллических трубопроводов атомной энергетики с учетом воздействия облучения.

Геометрические параметрыгиба биметаллического трубопровода

Криволинейные участки трубопроводов (так называемые гибы труб) являются наиболее повреждаемыми элементами трубопроводных систем тепловых и атомных электрических станций. Возникающие при изгибе трубы с криволинейной осью продольные усилия приводят к сплющиванию поперечного сечения (овализации трубы) [5]. Труба в зонегиба может рассматриваться как тороидальная биметаллическая оболочка кругового сечения (см. рис. 2).

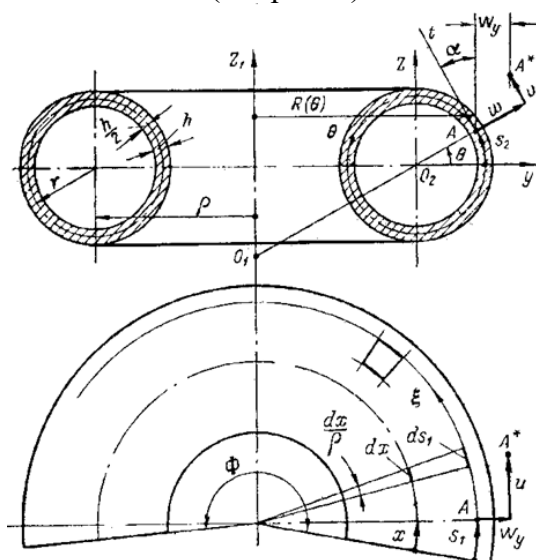


Рис.2. Тороидальная оболочка кругового сечения

Введем криволинейную систему координат ξ, θ, ζ . Координата $-h/2 \leq \zeta \leq h/2$ отсчитывается по нормали к срединной поверхности.

Как видно из рис. 2, линии $\xi = \frac{x}{r} = \alpha_1$ являются окружностями радиуса $R(\theta)$, получающимися сечением тора плоскостями, перпендикулярными оси симметрии (параллели), а линии $\theta = \frac{s_2}{r} = \alpha_2$ – окружности радиуса r (меридианы).

Длины дуг, отсчитываемые вдоль координатных линий, равны $ds_1 = A_1 d\alpha_1$, $ds_2 = A_2 d\alpha_2$, $ds_3 = A_3 d\zeta$,

Используя связь прямоугольных декартовых координат произвольной точки A поперечного сечения с криволинейными координатами точки A :

$$\begin{aligned} x &= R(\theta) \cos \xi = (\rho + r \cos \theta) \cos \xi = (\rho + r \cos \alpha_2) \cos \alpha_1, \\ y &= R(\theta) \sin \xi = (\rho + r \cos \theta) \sin \xi = (\rho + r \cos \alpha_2) \sin \alpha_1, \quad z = r \sin \theta = r \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (1)$$

можно получить необходимые геометрические параметрыгиба биметаллического трубопровода:

Первая квадратичная форма поверхности спая торообразной оболочки в силу ортогональности введенной криволинейной системы тороидальных координат будет равна

$$I = ds^2 = a_{11} d\xi^2 + 2a_{12} d\xi d\theta + a_{22} d\theta^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2.$$

При этом параметры Ламе, определяемые в общем случае по формуле

$$A_i = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2},$$

где $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3) = \bar{r}(\xi, \theta, \zeta)$ – радиус-вектор произвольной точки A , с учетом формул (1) будут равны

$$A_1 = \rho \left(1 + \frac{r}{\rho} \cos \alpha_2 \right), \quad A_2 = r. \quad (2)$$

Из рисунка 2 видно, что один из центров кривизны O_1 лежит на оси симметрии, другой O_2 – в центре сечения. Поэтому по теореме Менье первый главный радиус кривизны равен

$$R_1 = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{\rho + r \cos \theta}{\cos \alpha}, \quad (3)$$

а второй главный радиус кривизны равен

$$R_2 = r. \quad (4)$$

Легко убедиться в том что полученные выражения (2) – (4) удовлетворяют соотношениям Петерсона–Кодацци–Гаусса [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{R_1 R_2} &= - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned}$$

Радиусы кривизны R_1, R_2 определяют углы между гранями элемента оболочки в плоскостях, ортогональных срединной поверхности. В плоскости, касательной к срединной поверхности, углы между гранями элемента будут определяться

значениями $\frac{ds_1}{R_{13}}$ и $\frac{ds_2}{R_{23}}$, где R_{13}, R_{23} – радиусы кривизны, равные для торообразной

оболочки с круговым меридиональным сечением [6]

$$R_{13} = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad R_{23} = \infty.$$

Зная главные радиусы кривизны, можно определить вторую квадратичную форму

$$II = b_{11}d\xi^2 + 2b_{12}d\xi d\theta + b_{22}d\theta^2,$$

коэффициенты которой характеризуют нормальную кривизну координатных линий, а b_{12} – параметр кручения поверхности.

В принятых обозначениях с учетом соотношений (1) они определяются по формулам [7]

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_1^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} = \rho \left(1 = \frac{r}{\rho} \cos \alpha_2 \right) \cos \alpha_2,$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad b_{22} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_2^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} = r.$$

Напряженно-деформированное состояние тороидальных биметаллических оболочек

Напряженно-деформированное состояние тороидальных биметаллических оболочек в зоне гибов может быть описано уравнениями в усилиях-моментах [8]

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S_2}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{T_2}{R_{23}} + \frac{S_1}{R_{13}} - \frac{Q_1}{R_1} - q_1 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 S_1}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_{13}} + \frac{S_2}{R_{23}} + \frac{Q_2}{R_2} + q_2 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial A_2 Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 Q_2}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - q_z \right) = 0,$$

$$\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H_2}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{M_2}{R_{23}} + \frac{H_1}{R_{13}} + Q_1 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 H_1}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{M_1}{R_{13}} + \frac{H_2}{R_{23}} - Q_2 \right) = 0,$$

Здесь α_i ($i=1,2$) – координатные линии, T_i, S_i, Q_i ($i=1,2$) – внутренние усилия: M_i, H_i ($i=1,2$) – изгибающие и крутящие моменты, A_i ($i=1,2$) – параметры Ламе.

Соотношения упругости, связывающие усилия и моменты с относительными деформациями поверхности спая и параметрами изменения кривизн, определяются по формулам:

$$T_1 = B_1 \varepsilon_1 + B_2 \varepsilon_2 - C_1 \kappa_1 - C_2 \kappa_2 - N_T, \quad T_2 = B_2 \varepsilon_1 + B_1 \varepsilon_2 - C_2 \kappa_1 - C_1 \kappa_2 - N_T, \\ M_1 = C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2 - D_1 \kappa_1 - D_2 \kappa_2 - M_T, \quad M_2 = C_2 \varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2 - D_2 \kappa_1 - D_1 \kappa_2 - M_T. \quad (5)$$

При этом температурные составляющие усилий и моментов с учетом зависимости модулей упругости и коэффициентов β_1, β_2 линейного температурного расширения слоев от температуры находятся по формулам:

$$N_T = \frac{1}{1-\mu_1} \int_0^{\delta_1} E_1 \beta_1 T dz + \frac{1}{1-\mu_2} \int_{-\delta_2}^0 E_2 \beta_2 T dz, \\ M_T = \frac{1}{1-\mu_1} \int_0^{\delta_1} E_1 \beta_1 T z dz + \frac{1}{1-\mu_2} \int_{-\delta_2}^0 E_2 \beta_2 T z dz.$$

В соотношениях (5) теперь мембранные B_i ($i=1,2$), мембранно – изгибные C_i и изгибные D_i жесткостные параметры двухслойной оболочки равны:

$$B_1 = \frac{1}{1-\mu_1^2} \int_0^{\delta_1} E_1 dz + \frac{1}{1-\mu_2^2} \int_{-\delta_2}^0 E_2 dz, \quad B_2 = \frac{\mu_1}{1-\mu_1^2} \int_0^{\delta_1} E_1 dz + \frac{\mu_2}{1-\mu_2^2} \int_{-\delta_2}^0 E_2 dz,$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\mu_1^2} \int_0^{\delta_1} E_1 z dz - \frac{1}{1-\mu_2^2} \int_{-\delta_2}^0 E_2 z dz \right), \quad C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1}{1-\mu_1^2} \int_0^{\delta_1} E_1 z dz - \frac{\mu_2}{1-\mu_2^2} \int_{-\delta_2}^0 E_2 z dz \right),$$

$$D_1 = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\mu_1^2} \int_0^{\delta_1} E_1 z^2 dz + \frac{1}{3} \frac{1}{1-\mu_2^2} \int_{-\delta_2}^0 E_2 z^2 dz, \quad D_2 = \frac{1}{3} \frac{\mu_1}{1-\mu_1^2} \int_0^{\delta_1} E_1 z^2 dz + \frac{1}{3} \frac{\mu_2}{1-\mu_2^2} \int_{-\delta_2}^0 E_2 z^2 dz.$$

Учет воздействия радиационного поля

Как известно, конструкционные материалы под действием облучения испытывают структурные превращения, сопровождающиеся многочисленными эффектами, в результате которых возникает дополнительная объемная деформация Q_I , изменяются упругие и пластические характеристики материала. Степень изменения свойств и число дефектов в металле при облучении зависят от суммарного потока частиц, температуры облучения и температуры рекристаллизации металла.

Облучение вызывает повышение пределов текучести и прочности, снижение ресурса пластичности, увеличение критической температуры перехода из хрупкого в вязкое состояние. К важным радиационным эффектам относятся также газовое и вакансионное разбухание материалов, сопровождающееся существенным изменением размеров, короблением, растрескиванием и разрушением изделий.

Радиационную стойкость конструкционных материалов в основном повышают легированием и регулированием микроструктуры (ее измельчением).

Из всех видов облучения из-за высокой проникающей способности нейтральных частиц (нейтронов и γ -квантов) самое сильное влияние оказывает нейтронное облучение, вызывающее объемное повреждение материала.

Для оценки влияния нейтронного облучения на напряженно-деформированное состояние элементов конструкций рассмотрим однородное изотропное тело, занимающее полупространство $z \geq 0$. Если на границе тела ($z = 0$) параллельно оси z излучаются нейтроны с одинаковой средней энергией и интенсивностью φ_0 [нейтрон / (м²·сек)], то интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости $z = \text{const}$ определяется следующим образом [3]:

$$\varphi(z) = \varphi_0 \cdot e^{-\mu z} \quad (6)$$

Величина μ называется макроскопическим эффективным сечением. Для любого химического элемента можно записать:

$$\mu = \sigma n_0 = \sigma \frac{A_0 \rho}{A}, \text{ см}^{-1}.$$

Здесь σ – эффективное сечение, отнесенное к одному ядру, n_0 – число ядер в 1 см³; A_0 – число Авогадро; A – атомный вес; ρ – плотность.

В стационарном случае с учетом (6) к моменту времени t через сечение z пройдет интегральный поток:

$$I(z) = \varphi_0 t e^{-\mu z}.$$

Таким образом, можно принять, что изменение объема вещества прямо пропорционально интегральному потоку $I(z)$:

$$Q_I = B I(z).$$

Здесь B – постоянный коэффициент, полученный из эксперимента.

Отметим, что величина $I_0 = \varphi_0 t$ дает суммарный поток нейтронов на единицу площади поверхности тела. В ядерных реакторах φ_0 имеет порядок $10^{17} \div 10^{18}$ нейтрон/(м²·сек), а I_0 достигает значений $10^{23} \div 10^{27}$ нейтрон/м², при этом объемная деформация Q_1 достигает значения 0,1. Следовательно, в зависимости от энергии нейтронов и облучаемого материала величина B может иметь порядок $10^{-28} \div 10^{-24}$ м²/нейтрон.

Следует подчеркнуть, что зависимость модуля упругости E , пределов текучести σ_T , прочности и всей диаграммы растяжения от интегрального потока I_0 различных энергий исследована экспериментально после облучения образцов в ядерных реакторах. Отмечено, что модуль упругости E при облучении возрастает до 5 %. Пределы текучести и прочности материалов также возрастают при радиационном облучении. Таким образом, по своему воздействию на упругие конструкции радиационное облучение, в основном, противоположно тепловому воздействию, которое уменьшает предел текучести материала и другие характеристики.

Для аналитического описания радиационного упрочнения предела текучести материала используется следующая формула:

$$\sigma_T = \sigma_T^0 \left\{ 1 + A [1 - \exp(-\xi I)]^{1/2} \right\}.$$

Здесь σ_T , σ_T^0 – предел текучести облученного и необлученного материалов; A , ξ – константы материала, определяемые из экспериментов.

Таким образом, при решении краевой задачи по расчету термоупругих агрегатов ядерной энергетики могут использоваться известные зависимости модуля упругости E от температуры, в которых должно быть учтено также радиационное упрочнение физико-механических характеристик материала.

Учет деформации контура поперечного сечения гiba трубы

Так как деформирование поперечных сечений в области гiba сопровождается существенным уменьшением жесткости, то при анализе основного напряженного состояния при изгибе криволинейных труб и стержней открытого сечения можно перейти к уравнениям полубезмоментной теории цилиндрических оболочек В.З. Власова [9] обобщенной на случай гибких оболочек двоякой кривизны [10, 11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + r q_1 = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + \frac{T_1}{R_{13}} + \frac{r}{R_2} Q_2 + r q_2 = 0, \\ \frac{r}{R_1} T_1 + \frac{r}{R_2} T_2 - \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - r q_u = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial \theta} - r Q_1 = 0, \quad \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - r Q_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) являются уравнениями линейной теории. Они не учитывают влияние деформации гiba трубы на расположение внутренних сил. Они также не позволяют произвести учет влияния внутреннего давления p_0 на жесткость трубы. Поэтому необходим учет деформации контура поперечного сечения гiba трубы.

Составим далее условия равновесия элемента оболочки, учитывающие изменение его формы в процессе деформации трубы. Для этого необходимо дополнить уравнения (7), заменив в них радиусы кривизны нормальных сечений R_1 и R_2 и радиус R_{13} их значениями после деформации R_1^* , R_2^* , R_{13}^* , что отразит изгиб элемента оболочки.

Кроме того, необходимо учесть деформацию кручения элемента, характеризуемого параметром τ . При условии, что A_1 , $A_2 \approx \text{const}$, получим:

$$\tau = \frac{\partial g_1}{A_2 \partial \alpha_2} = \frac{\partial g_2}{A_1 \partial \alpha_1}.$$

После внесения дополнений, учитывающих изменение формы трубы при изгибе и кручении, уравнения (7) для элемента оболочки, находящегося в деформированном состоянии, переписутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + rQ_2\tau + rq_1 = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + \frac{T_1}{R_{13}^*} + \frac{r}{R_2^*}Q_2 + rq_2 = 0, \\ \frac{r}{R_1^*}T_1 + \frac{r}{R_2^*}T_2 - \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} + 2rS\tau - rq_z = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial \theta} - rQ_1 = 0, \quad \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - rQ_2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь величины Q_1 и $S_1 = S_2 = S$ в первых трех уравнениях отбрасываются.

Уравнения (8) являются нелинейными, так как включают произведения усилий на кривизну и кручение деформированной координатной поверхности $Q_2\tau$, $S\tau$. Неизвестные параметры деформации оболочки содержат величины R_1^* , R_2^* , R_{13}^* .

Уравнения (8) могут быть упрощены при отбрасывании членов, нелинейных относительно неизвестных функций, но в то же время, при сохранении членов, нелинейных относительно параметров нагрузки: изгибающего момента M_0 и поперечного давления p_0 (физическая нелинейность).

Основная часть геометрической нелинейности деформации изгиба криволинейной части (гиба) трубы является следствием изменения эффекта Кармана в результате изменения кривизны оси.

В результате исходной деформации поперечное сечение трубы остается круговым $R_2^0 = R_r = r$, а кривизна оси изменяется от $1/\rho$ до $1/\rho^0$, но остается постоянной вдоль трубы

$$\frac{1}{R_1^0} = \frac{\cos \theta}{\rho^0} = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{M}{EI} \right) \cos \theta. \quad (9)$$

Компоненты деформации будем рассматривать состоящими из двух частей: первая их часть определяется в предположении недеформированности поперечных сечений, а вторую часть составляют компоненты, возникающие в результате деформации контура сечений.

Тогда кривизну ε_0 продольной оси гiba трубы после приложения нагрузки, вычисляемую без учета деформации контура, (назовем ее исходной):

$$\varepsilon_0 = \alpha r \cos \theta \quad (10)$$

можно вычислить с учетом (9) по формуле

$$\alpha = \frac{1}{\rho^0} - \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (11)$$

Полное относительное удлинение продольных волокон ε_1 , определяется в виде суммы удлинений: исходного ε_0 и удлинения, вызванного деформацией поперечных сечений

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{r}{\rho_0} W_y. \quad (12)$$

В выражении (12) относительное удлинение продольных волокон, вызванное их перемещением в плоскости кривизны оси трубы (эффектом Кармана), учтено слагаемым $\frac{r}{\rho^0} W_y$, где

$$W_y = w \cos \theta - v \sin \theta - W_y^0, \quad (13)$$

где W_y^0 – смещение сечения трубы как жесткого целого.

Здесь и далее все компоненты перемещений (u, v, w, W_y) описывают только часть деформации трубы, связанную с изменением формы поперечных сечений.

Принимая в соответствии с допущениями полубезмоментной теории, что относительное удлинение в окружном направлении и сдвиг срединной поверхности малы по сравнению с соответствующими производными, соотношения между деформациями и перемещениями можно записать в обычном для линейной теории оболочек виде:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0; \quad \mathcal{G} = -\mathcal{G}_2 = \frac{\partial w}{\partial \theta} - v. \quad (14)$$

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; \quad \mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta}; \quad \tau = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi}. \quad (15)$$

Исключим из уравнений равновесия (8) усилия N_2, Q_2, S и учтем, что при заданной нагрузке (момент M и внутреннее давление интенсивностью p) составляющие q_1, q_2 и q имеют значение: $q_1 = q_2 = 0; q_n = p_0$.

В результате получим уравнение, содержащее лишь две неизвестные величины – N_1 и M_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{R_2^*}{R_1^*} N_1 \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{R_2^*}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{\rho^0} \sin \theta \cdot N_1 \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_2^*} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R_2^* p) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В уравнение (16) вошли радиусы кривизны и кручение деформированной срединной поверхности трубы, которые связаны с исходной кривизной следующими зависимостями:

$$\frac{1}{R_1^*} = \frac{\cos \theta}{\rho^0} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; \quad \frac{1}{R_2^*} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \right); \quad \frac{r}{\rho^0} \sin \theta = R_{13}^0 \approx R_{13}^*. \quad (17)$$

Решая в дальнейшем задачу в перемещениях, используем соотношение между деформациями и перемещениями (11) – (15) и соотношения упругости. Подставляя затем эти соотношения и выражения (17) в уравнение (16), получим линейное уравнение в перемещениях следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \frac{r}{\rho^0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \cos \theta \right) - \frac{r}{\rho^0} \frac{\partial u}{\partial \xi} \sin \theta + \frac{r}{\rho^0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (w \cos \theta - v \sin \theta) + \\ & + \left(\frac{r}{\rho^0} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(w \cos^2 \theta - \frac{1}{2} v \sin 2\theta \right) - \left(\frac{r}{\rho^0} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} w \sin 2\theta - v \sin^2 \theta \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_v^2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} - 1 \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \varepsilon_0 \right) + \frac{r}{\rho^0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\varepsilon_0 \left(g \sin \theta + \frac{\partial g}{\partial \theta} \cos \theta \right) \right] - \\
& - \frac{r}{\rho^0} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varepsilon_0 \sin \theta) + \frac{r}{\rho^0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\varepsilon_0 \cos \theta) - r \frac{p}{Eh} \frac{\partial^3 g}{\partial \theta^3} = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь ε_0 – исходная деформация, определяемая выражением (10); k_v – безразмерный параметр толщины стенки трубы: $k_v = h/c_v r$; $c_v = \sqrt{12(1-\nu^2)}$.

Уравнение (18) содержит 4 неизвестные функции: перемещения u , v , w и угол поворота g . Присоединив к нему 3 уравнения (14), связывающие u , v , w и g , получим замкнутую систему уравнений в перемещениях.

Получающиеся при интегрировании полученной системы четырех дифференциальных уравнений в частных производных произвольные постоянные интегрирования находятся из граничных условий задачи.

Решение краевой задачи

К решению краевой задачи применим метод разложения неизвестных функций в тригонометрические ряды по окружной координате θ . В этом случае для каждого члена разложения выполняются условия периодичности по координате θ .

Граничные условия на концах трубы удовлетворяются за счет переменных коэффициентов разложений, представляющих собой функции продольной координаты ξ .

Представим радиальную составляющую перемещения w в виде ряда:

$$w = \sum_n f_n(\xi) \cos n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \tag{19}$$

Здесь $f_n(\xi)$ – подлежащие определению функции продольной координаты ξ .

Основные компоненты перемещения и угол поворота запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
u &= -\sum_n \frac{1}{n^2} f'_n(\xi) \cos n\theta; & v &= -\sum_n \frac{1}{n} f_n(\xi) \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots; \\
g &= -\sum_n \frac{n^2 - 1}{n} f_n(\xi) \sin n\theta; & W_y &= \frac{1}{2} \sum_n \left(f_{n+1} \frac{n+2}{n+1} + f_{n-1} \frac{n-2}{n-1} \right) \cos n\theta.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь W_y – компоненты перемещения, описывающие часть деформации трубы, связанную с изменением формы поперечных сечений (эффект Кармана) определяются по формуле (13).

Подставляя разложения компонентов перемещения u , v , w и поворот g (19)–(20) в уравнение равновесия (18), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка (каждое) относительно неизвестных функций $f_n(\xi_0)$, где $\xi_0 = \xi \sqrt{k_v}$:

$$\begin{cases} f_1^{IV}(\xi_0) - \left(\frac{3}{4} \mu + \frac{M^0}{2} \right) f_2''(\xi_0) = 0; \\ a_{n,n-2} f_{n-2}(\xi_0) + a_{n,n-1} f_{n-1}^{II}(\xi_0) + f_n^{IV}(\xi_0) + a_n f_n(\xi_0) + a_{n,n+1} f_{n+1}^{II}(\xi_0) + a_{n,n+2} f_{n+2}(\xi_0) = P \delta_{2n}. \end{cases}$$

Индексы n будут принимать следующие значения:

$$n = 2, 3, 4, \dots; \quad \delta_{2n} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2; \\ 0 & \text{при } n \neq 2. \end{cases}$$

Переменная ξ_0 будет изменяться в следующих пределах:

$$-l_0 \leq \xi_0 \leq l_0, \text{ где } l_0 = \sqrt{k_v} \frac{L}{2r}.$$

Ряды (19) – (20) обладают хорошей сходимостью. Поэтому для получения хороших результатов при $\mu < 10$ достаточно в них сохранить три члена, не считая $n = 1$, т. е. $n = 2, 3, 4$.

Усеченную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в общем случае с переменными коэффициентами запишем в виде:

$$\begin{cases} f_2^{IV} + a_2 f_2 + a_{23} f_3^{II} + a_{24} f_4 = P; \\ f_3^{IV} + a_{32} f_2^{II} + a_3 f_3 + a_{34} f_4^{II} = 0; \\ f_4^{IV} + a_{42} f_2 + a_{43} f_3^{II} + a_4 f_4 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Система уравнений (21) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 12-го порядка. В настоящей работе к интегрированию системы уравнений (21) применяется аналитический подход, основанный на использовании модифицированного метода последовательных приближений В.А. Пухля [12–13].

Применение модифицированного метода последовательных приближений

Предварительно представим систему дифференциальных уравнений (21) 12-го порядка в нормальной форме Коши:

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^s B_{v,m} X_v + f_m, \quad m = 1, 2, \dots, s. \quad (22)$$

В соответствии с модифицированным методом последовательных приближений [12–13] переменные коэффициенты $B_{v,m}$ и свободные члены f_m представляются через смещенные полиномы Чебышева:

$$B_{v,m} = \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} d_r^{-1} \sum_{k=0}^r a_k T_k^*(\xi), \quad f_m = \sum_{r=0}^q f_{m,r} (d_r \cdot r!)^{-1} \sum_{k=0}^r a_k T_k^*(\xi). \quad (23)$$

Здесь q – степень интерполяционного полинома; a_k – коэффициенты разложения ξ^r в ряд по многочленам Чебышева $T_k^*(\xi)$. В выражениях (23) $d_r = 1$ для $r = 0$ и $d_r = 2^{2r-1}$ для остальных r .

Общее решение системы уравнений (22) имеет вид [12, 13]:

$$X_m = \sum_{\mu=1}^s C_\mu \left[d_0^{-1} a_0 T_0^*(\xi) \delta + \sum_{n=1}^{\infty} X_{m,\mu,n} \right] + \sum_{j=0}^q t_{m,j,0} [d_{j+1} (j+1)!]^{-1} \sum_{k=0}^{j+1} a_k T_k^*(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} X_{m,n} \quad (24)$$

где $t_{m,j,0} = f_{m,r}$ при $j = r$; μ – номер фундаментальной функции; C_μ – постоянные интегрирования.

В решении (24) $\delta = 1$, если $m = \mu$ и $\delta = 0$ для остальных μ . Первое приближение $X_{m,\mu,1}$ получается из подстановки нулевого приближения: $d_0^{-1} a_0 T_0^*(\xi) \delta$ в правую часть однородной системы:

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^s B_{v,m} X_v.$$

Последующие приближения осуществляются по формулам:

$$\begin{aligned} X_{m,\mu,n} &= \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,\mu,n,j} [d_{n+j-1}(n+j-1)!]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi); \\ X_{m,n} &= \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,n,j} [d_{n+j-1}(n+j-1)!]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\beta = n(q+3) - 2$.

Отметим, что системы фундаментальных функций (25) являются равномерно сходящимися рядами, при этом коэффициенты $t_{m,\mu,n,j}$ и $t_{m,n,j}$ определяются через коэффициенты предыдущего приближения по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} t_{m,\mu,n,j} &= \sum_{v=1}^s \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} t_{v,\mu,n-1,j-r} (n+j-1)^{-1} \prod_{\gamma=0}^r (n+j-1-\gamma); \\ t_{m,\mu,n,j} &= \sum_{v=1}^s \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} t_{v,\mu,n-1,j-r} (n+j-1)^{-1} \prod_{\gamma=0}^r (n+j-1-\gamma). \end{aligned}$$

Постоянные C_{μ} , входящие в общее решение (33), находятся из граничных условий.

Выводы

Приведена полная система геометрических и деформационных соотношений, определяющих дифференциальную геометрию поверхности спая биметаллических торообразных оболочек, а также физические соотношения для усилий и моментов таких оболочек с учетом зависимости физико-механических характеристик от температуры и радиационного облучения.

Изложен алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния гибов биметаллических тороидальных оболочек применительно к системам трубопроводов атомных реакторов.

Показана возможность применения аналитического подхода к расчету прочности и жесткости гибов трубопроводов, основанного на использовании модифицированного метода последовательных приближений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополя в рамках научного проекта №18-48-920002.

Список литературы

1. Гетман А.Ф. Ресурс эксплуатации сосудов и трубопроводов АЭС. – М.: Энергоатомиздат, 2000. – 427 с.
2. Аркадов, Г.В. Надежность оборудования и трубопроводов АЭС и оптимизация их жизненного цикла (вероятностные методы). – М.: Энергоатомиздат, 2010. – 424 с.
3. Платонов П.А. Действие облучения на структуру и свойства металлов. – М.: Машиностроение, 1971. – 402 с.
4. Пухлий В.А., Коган Е.А., Пухлий К.В. Краевая задача Кармана для упругогогиба биметаллических трубопроводов гидроэнергетики. – Энергетические установки и технологии, 2019, том 5, № 3, с. 25–35.
5. Аксельрад Э.Л. Расчет трубопроводов. – Л.: Машиностроение, 1970. – 240 с.
6. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
7. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гостехиздат, 1950. – 360 с.

8. Пухлий В.А. Об одной краевой задаче для упругогогиба трубопроводов гидротехнических сооружений и АЭС. – Теория механизмов и машин. – 2014. – Т. 12. – № 2 (24). – С. 3–15.
9. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
10. Аксельрад Э.Л. Тонкостенные криволинейные стержни и трубы. – Сб. «Исследования по строительной механике». Труды ЛИИЖТ. 1966. – Вып. 249. – С. 147–168.
11. Аксельрад Э.Л. Полубезмоментная теория гибких оболочек. – Труды X всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, 22–29 сентября 1975 г. – Тбилиси: Изд-во «Мецниереба», 1975. – Т. 1. – С. 487–497.
12. Пухлий В.А. Метод аналитического решения двумерных краевых задач для систем эллиптических уравнений. – Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1978. Т. 18. – № 5 – С. 1275–1282.
13. Пухлий В.А. Об одном подходе к решению краевых задач математической физики. – Дифференциальные уравнения. – 1979. Т. 15 – № 11. – С. 2039–2043.