

АДАПТАЦИЯ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ К ТЕПЛООБМЕНУ В ПУЧКЕ СТЕРЖНЕЙ

Сергеенко К. М. (АО НИКИЭТ, Москва, Россия)

Введение

В практических приложениях часто можно наблюдать, что процессы теплообмена происходят за счет организации обтекания потоком цилиндрических стержней. Примерами таких течений являются течения в парогенераторах, системах аварийного отвода тепла, тепловыделяющих сборках и т.п. Как правило, потоки в этих каналах устроены таким образом, что поток продольно омывает поверхность теплообмена. При этом параметры потока, такие как числа Рейнольдса, Прандтля, отношение шага к диаметру, тип упаковки стержней (треугольные или квадратные), часто различны. Например, в реакторе БРЕСТ-ОД-300 число Рейнольдса изменяется от $5 \cdot 10^3$ до $2 \cdot 10^5$, а отношение шага к диаметру стержней в пределах всей реакторной установки – от 1.2 до 1.4.

Большинство экспериментальных исследований фокусируется на определении интегральных характеристик течения: коэффициент трения и число Нуссельта. Полученные таким образом характеристики течения часто аппроксимируются уравнениями, имеющими узкий диапазон определяющих параметров. Так, например, в [1] для определения коэффициента трения для пучка стержней, расположенных в треугольной упаковке, предлагается использовать уравнение:

$$FF = \begin{cases} FF_{\text{pipe}} \left[0.41 + 1.9 \sqrt[3]{\kappa - 1} \right], & 1 \leq \kappa \leq 2, Re < 3 \cdot 10^3 \\ FF_{\text{pipe}} \left[0.63 \kappa^{\frac{2}{3}} + (\kappa - 1)^{\frac{1}{2}} \right], & 1 < \kappa < 1.5, 3 \cdot 10^3 < Re < 1.5 \cdot 10^5 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь, κ – относительный шаг стержней, $Re = U_b D_h / \nu$ – число Рейнольдса, $U_b = \int_A U_z dA / A$ – средняя скорость, ν – кинематическая вязкость, $FF = -dP/dL > D_h / (\rho U_b^2 / 2)$ – коэффициент трения, P – давление, L – длина, $D_h = 4A / \chi$ – гидравлический диаметр, FF_{pipe} – коэффициент трения для трубы, ρ – плотность, A – поперечное сечение, χ – смоченный периметр, U_z – проекция вектора скорости на единичный вектор, сонаправленный с направлением течения.

Аналогичным примером является зависимость для числа Нуссельта, которая приведена в той же работе [1]:

$$Nu = \begin{cases} 1.1(1.1\kappa^2 - 1)^{0.1} 0.023 Pr Re^{0.8} \{1 + 2.14 Re^{-0.1} (Pr^{0.7} - 1)\}^{-1}, & Pr = 0.5 \div 200 \\ 1.1(1.1\kappa^2 - 1)^{0.1} 0.023 Pr^{0.4} Re^{0.8}, & Pr = 0.7 \div 2 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь: $Nu = \alpha D_h / \lambda$ – число Нуссельта, $Pr = \nu / a$ – число Прандтля, $a = \lambda / \rho C_p$ – температуропроводность, C_p – теплоемкость при постоянном давлении, λ – теплопроводность, $\alpha = q_w / (<T_w> - <T_m>)$ – коэффициент теплоотдачи, q_w – тепловой поток на стенке, $<T_m> = \int_A <U_z T> dA / \int_A <U_z> dA$ – среднесмешанная температура.

Для жидкометаллических теплоносителей ($Pr < 1$) и при условии $\kappa < 2$ может быть использована следующая формула [2]:

$$Nu = 7.55\kappa - 20\kappa^{-13} + 0.0408\kappa^{-2} Pe^{0.56 + 0.19\kappa} \quad (3)$$

Из уравнений (1) и (2) видно, что эмпирические зависимости имеют ограниченный диапазон определяющих параметров. Вообще говоря, можно столкнуться с ситуацией, когда, следуя разным эмпирическим уравнениям, одному и тому же набору определяющих параметров соответствуют разные результаты. В этом случае инженеру необходимо решить самостоятельно, какое из эмпирических уравнений подходит для его расчетного случая. В качестве примера можно привести работу [3], в которой предлагается рассчитывать коэффициент трения пучка стержней по уравнению для цилиндрической трубы:

$$FF = 0.3164Re^{-0.25} \quad (4)$$

Уравнения (1) и (4) Eqs. (1, 4) показывают, что одному и тому же числу Рейнольдса соответствуют разные значения коэффициента трения. Выходом из этой ситуации может быть учет ошибок, обычно допускаемых при построении эмпирических уравнений или проведение дополнительных исследований, численных или экспериментальных.

Экспериментальные исследования требуют значительных финансовых и временных затрат, что негативно сказывается на вариативности проектных решений. При этом расчетные исследования, в свою очередь, можно условно разделить на те, которые требуют использования определенных допущений о структуре течения. Прежде всего, это исследования с использованием осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS). Также есть исследования, в которых не используются допущения о структуре потока – прямое численное моделирование (DNS).

RANS можно рассматривать, как рабочий инструмент, который способен быстро и ответить на поставленные вопросы. Но из-за использования множества предположений о структуре потока он требует проведения процедуры проверки. Эта процедура может быть осуществлена на основе данных, полученных с помощью DNS, или эксперимента. Главный недостаток DNS — вычислительная сложность. В качестве примера в работе [4] показано, что для течения при $Re=4 \cdot 10^4$ требуется около 1.2 млрд ячеек. Таким образом, сложность получения данных, пригодных для верификации RANS, высока как в случае использования DNS, так и в случае экспериментальных исследований.

Выходом из этой ситуации может быть адаптация выбранной модели турбулентности RANS для конкретного класса течений. При этом в рамках построения можно использовать как данные DNS, так и экспериментальные данные.

1. DNS

Объектом исследования является безразмерный бесконечный треугольный пучок стержней с относительным шагом=1.4 (рис. 1), и единичным значением гидравлического диаметра ($D_h=1$).

Для детального изучения теплогидравлических характеристик рассмотрено течение четырех различных теплоносителей с числами Прандтля $Pr=0,0043, 0,0154, 0,0324$ и $0,71$ при трех различных числах Рейнольдса $Re=2500, 5000$ и 10000 . Приведенные числа Прандтля соответствуют четырем распространенным теплоносителям: натрию, свинцу, свинцу-висмуту и воздуху. Длина расчетной области различна от 50 при $Re=2500$ до 20 при других числах Рейнольдса. Это связано с тем, что при $Re=2500$ формируется перемежаемый режим течения, что требует увеличения расчетной области для разрешения вихревых структур.

На теплообменных поверхностях задаются условия постоянства теплового потока и прилипания, в то время как на остальных границах задаются периодические граничные условия (рис. 1).

Параметр M (рис. 1) равен 3.0. Кроме того, на рисунке 1 также показаны линии AB и CD , а также поверхность ω , которые будут использоваться при анализе результатов.

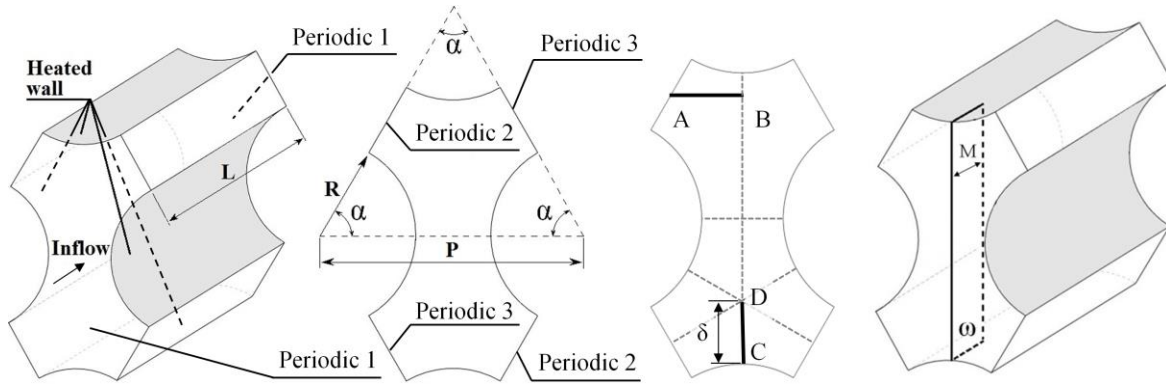


Рис.1. Геометрия расчетной области, граничные условия и геометрия анализируемых элементов
1.1. Постановка задачи

Уравнениями описывающее течение и теплообмен несжимаемой жидкости являются безразмерные уравнения Навье–Стокса и уравнения энергии:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + (1/Re)\Delta \mathbf{U} + \mathbf{J}_m \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_i = (1/Pe_i)\Delta T_i + J_{ei} \quad (7)$$

Здесь: $i=1,...,4$ – индекс, соответствующий различным теплоносителям ($Pr_1=0.0043$, $Pr_2=0.0154$, $Pr_3=0.0324$, $Pr_4=0.71$), $\mathbf{U}$ – вектор скорости, T_i – температура, $Pe_i=Pr_i Re$ – число Пекле, $\mathbf{J}_m = \mathbf{e}_z \tau_w \lambda / A$ – источниковое слагаемое, обеспечивающее движение жидкости с единичным значением средней скорости ($U_b=1$), $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор, сонаправленный с направлением течения, $J_{ei} = -U_z q_{wi} \lambda / (U_b \rho_i C_{pi} A)$ – объемный сток тепла, обеспечивающий единичное значение средней температуры ($T_s=1$), q_{wi} – тепловой поток на стенке ($q_{wi}=\lambda_i$), λ_i – теплопроводность. Сток тепла в объеме компенсирует подвод тепла со стенок и поддерживает постоянство среднесмешанной температуры, соответствующий постановке «Ideal isoflux boundary conditions». Данная постановка предполагает, что мгновенный тепловой поток через стенку однороден в пространстве и постоянен во времени [5]. Начальные поля соответствуют решению, которое получено при ламинарном режиме течения, к которому добавлены бездивергентные возмущения амплитудой в 30 %.

Система уравнений (5) – (7) решалась с применением CFD-кода STAR-CCM+ [6]. Метод контрольного объема использовался для дискретизации соотношений. Алгоритм SIMPLE [7] использовался для построения итерационной процедуры решения. Конвективные слагаемые аппроксимированы схемой центральной разности, в то время как временные слагаемые аппроксимированы неявной схемой второго порядка.

В расчетных исследованиях использовалась структурированная гексагональная сетка (рис. 2). Из рисунка видно, что сетка имеет сгущение по нормали к поверхности.

Данное сгущение устроено таким образом, что отношение толщин ячеек не превышает значения 1.05, что с учетом толщины пристеночной ячейки (таблица 1) обеспечивает 13 и более ячеек на область до $y^+ = 15$ ($y^+ = y u_\tau / \nu$ где: $u_\tau = \tau_w^{0.5} \rho^{-0.5}$). В таблице 1 использованы следующие обозначения: N_{cell} – суммарное количество ячеек; N_{rod} – количество ячеек по окружности тепловыделяющего элемента; N_z – количеству ячеек вдоль главного направления течения; Δy^+_{center} – толщина ячейки в ядре потока; Δy^+_w , $\Delta \phi^+$, Δz^+ – значения толщины, ширины и длины пристеночной ячейки соответственно; Δy^+_c – толщина ячейки в ядре потока; η^+ – масштаб Колмогорова в вязких масштабах ($\eta^+ = \eta u_\tau / \nu$, где: $\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{0.25}$). Осреднение полей выполнялось на каждом шаге по времени Δt^+ ($t^+ = t u_\tau^2 / \nu$), начиная с t_{start}^+ и оканчивая t_{end}^+ (таблица 1).

Таблица 1

Параметры расчетных сеток и параметры набора статистики

Re	N_{cell}	N_{rod}	N_z	$\Delta y^+_w (\eta^+_w)$	$\Delta \phi^+$	Δz^+	$\Delta y^+_c (\eta^+_c)$	t_{start}^+	t_{end}^+	Δt^+
2500	9.45×10^6	270	1400	0.9 (4.6)	2.0	7.0	2.5 (4.1)	2305	6147	0.15
5000	11.02×10^6	324	1000	0.9 (1.7)	2.9	7.1	3.7 (3.3)	3738	6728	0.25
10000	31.5×10^6	900	1500	0.9 (1.7)	3.9	8.7	4.9 (4.1)	1283	11976	0.21



Рис. 2. Фрагменты расчетных сеток:
Re=2500 (слева), Re=5000 (середина) и Re=10000 (справа)

1.2. Результаты

Расчетные значения коэффициентов трения и чисел Нуссельта сведены в таблицу 2. Таблица 2 также содержит информацию о значения Рейнольдса трения ($Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$). Также таблица 2 представляет информацию о числах Нуссельта, которые определены в соответствии с различными значениями температуры теплоносителя: $\langle T_b \rangle = \int_A \langle U_z \rangle \langle T \rangle dA / \int_A \langle U_z \rangle dA$ [8] и через осредненную по поверхности температуру [9] $\langle T_s \rangle = \int_A \langle T \rangle dA / A$. Можно видеть, что для теплоносителей с числом Прандтля <1 наблюдается слабая зависимость числа Нуссельта от чисел Прандтля и Рейнольдса. Это может быть связано с доминированием молекулярных сил. Для количественного анализа данного аспекта, была выполнена декомпозиция числа Нуссельта на сумму его кондуктивного и турбулентных вкладов:

$$Nu_s = Nu_{s_cond} + Nu_{s_turb} \quad (8)$$

здесь: $Nu_{s_cond} = (Nu_s/V) \int_V q_{cond} / (q_{cond} + q_{turb}) dV$ – число Нуссельта, определенное кондуктивными вкладами, $Nu_{s_turb} = (Nu_s/V) \int_V q_{turb} / (q_{cond} + q_{turb}) dV$ – число Нуссельта, определенное турбулентными вкладами (рис. 3). Примечательно, что значения Nu_{s_turb} линейны по числу Рейнольдса для выбранного теплоносителя. В настоящем исследовании максимальное значение Nu_{turb} для теплоносителей с числом Прандтля <1 соответствует 12 %, в то время, как для теплоносителя с числом Прандтля 0.71 эта величина соответствует значению 81 %.

Также можно видеть, что разница между Nu и Nu_b незначительна, в то время, как отклонение между Nu и Nu_s составляет приблизительно 10 %.

Таблица 2

Значения коэффициентов трения и чисел Нуссельта, вычисленные с использованием DNS

Re (Re_τ)	FF	Pr=0.0043: Nu_s, Nu_b, Nu	Pr=0.0154: Nu_s, Nu_b, Nu	Pr=0.0324: Nu_s, Nu_b, Nu	Pr=0.71: Nu_s, Nu_b, Nu
2500 (52.0)	0.0492	12.5, 10.7, 10.6	12.5, 10.7, 10.6	12.5, 10.7, 10.6	13.1, 11.2, 11.2
5000 (93.7)	0.0399	13.2, 11.8, 11.7	13.2, 11.8, 11.8	13.4, 12.0, 11.9	21.1, 19.4, 19.1
10000 (173.6)	0.0342	13.5, 12.5, 12.5	13.8, 12.7, 12.7	14.5, 13.4, 13.3	36.4, 34.5, 34.2

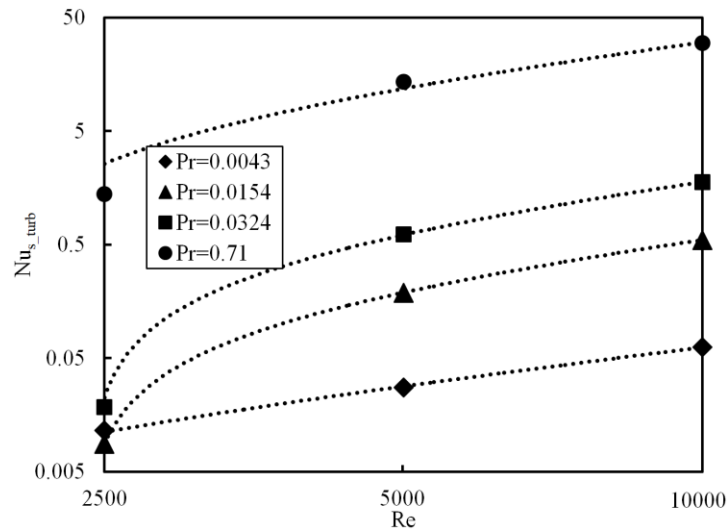


Рис. 3. Турбулентное число Нуссельта. Точки соответствуют линейной аппроксимации

Аппроксимируя данные, представленные в таблице 2 и на рисунке 3, а также используя уравнение (8) для декомпозиции числа Нуссельта, получаем формулу, описывающую расчетные данные с 10% погрешностью:

$$Nu_{s_cond} = 34.6 - 3.03 \ln(Re) + \ln(Pr) [5.8 - 0.79 \ln(Re)] \quad (9)$$

$$Nu_{s_turb} = 0.0053 Pe - 9.5 Pr \quad (10)$$

Результаты DNS расчетов сопоставлялись с данными экспериментальных исследований по распределению осредненного значения продольной компоненты скорости, интенсивности пульсаций продольной компоненты скорости (рис. 4) [10] а также с данными, полученными в рамках DNS расчетов, выполненными другими авторами [12], экспериментальными по значению коэффициента трения и числа Нуссельта [11] и справочными данными (таблица 3). Видно, что отклонение по данным DNS не превышает 2 %, в то время как рассогласование со справочными данными в основном не превышает 10 %.

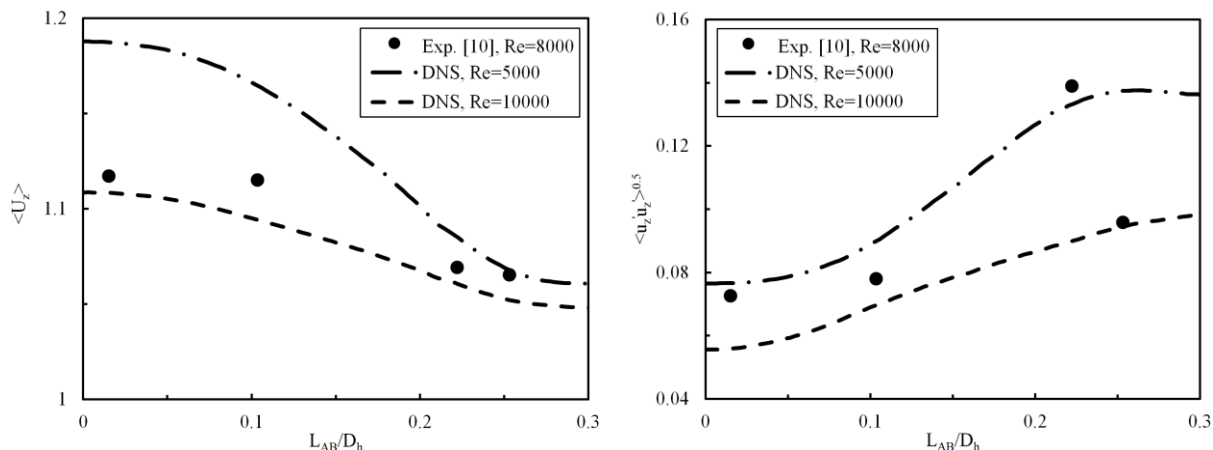


Рис. 4. Профили продольной компоненты скорости и интенсивности пульсаций продольной компоненты скорости вдоль линии AB.

Таблица 3

Сопоставление коэффициентов трения и чисел Нуссельта

Case	DNS [12]	Exp. [11]	Eq.(1)	Eq.(4)	Eq.(3)	Eq.(3)	Eq.(3)	Eq.(2)
Re	8290	10200	10000	10000	10000	10000	10000	10000
Pr	0.031	0.0324	—	—	0.0043	0.0154	0.0324	0.71
FF	0.0352	0.031	0.045	0.0316	—	—	—	—
Nu	12.8	14	—	—	10.8	11.6	12.8	31.6÷31.8

На рисунке 5 представлено мгновенное поле скорости и температуры на поверхности ω . Можно видеть, что для числа Рейнольдса 2500 наблюдается перемежаемый режим течения, в то время как для остальных случаев можно говорить о развитом турбулентном течении. Также можно выделить несколько особенностей, к которым относятся: минимальное значение возмущений температурного поля для теплоносителей с числами Прандтля <1 и полное соответствие указанных полей при $Pr=0.7$.

На рисунке 6 приведено распределение осредненной скорости вдоль линии CD, полученное по результатам настоящего DNS-расчета, а также по данным DNS [12] и по формуле фон Кармана [13]:

$$U^+ = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq 5 \\ 5 \ln(y^+) - 3.05, & 5 < y^+ \leq 30 \\ 2.5 \ln(y^+) + 5.5, & y^+ > 30 \end{cases} \quad (11)$$

Можно видеть, что формула фон Кармана наилучшим образом согласуется с данными DNS на высоких числах Рейнольдса, в то время как при $Re = 2500$ из-за доминирования молекулярных сил она не применима.

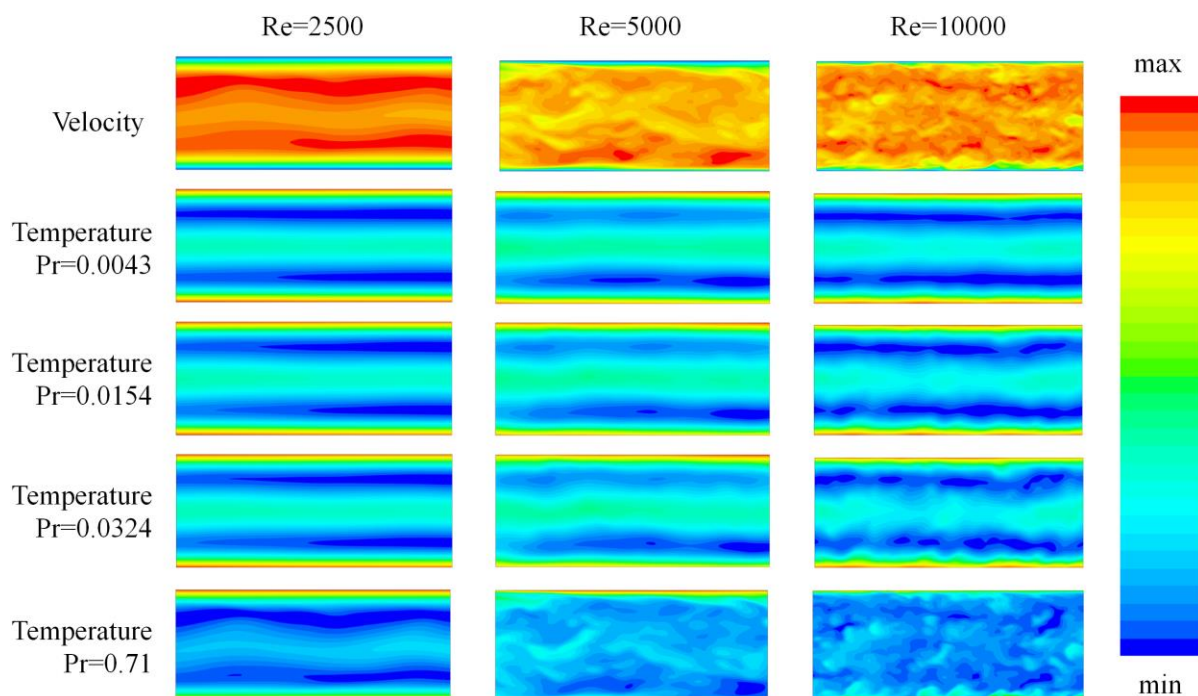


Рис. 5. Мгновенные поля скорости и температуры на поверхности ω

Существует несколько работ [14–16], в которых авторы формулировали соотношения для температурного профиля. В результате были предложены уравнения для температурных профилей, которые были применимы (как правило) к выбранному теплоносителю. Так, одна из наиболее распространенных формул температурного профиля для теплоносителей с $Pr < 1$ – формула, предложенная Кирилловым [14]:

$$T^+ = \begin{cases} y^+ Pr, & y^+ Pr < 1 \\ 1.87 \ln(y^+ Pr + 1) + 0.0659 y^+ Pr - 0.36, & 1 < y^+ Pr < 11.7 \\ 2.5 \ln(y^+ Pr) - 1, & y^+ Pr > 11.7 \end{cases} \quad (12)$$

При этом для теплоносителей с $Pr \approx 1$ рекомендована формула [15]:

$$T^+ = 5 \ln(y^+) + 2.9 \quad (13)$$

В настоящей работе, основываясь на данных работы [17], в которой предложена связь между кондуктивным и вязкостным масштабом через соотношение $\delta_c/\delta_v = \text{Pr}^{-0.5}$ (таким образом, температурный масштаб определяется формулой: $y^{++} = \text{Pr}^{0.5} y^+$), а также принимая во внимание $T^+ = U^+$ при $\text{Pr}=1$ и факт доминирования кондуктивных сил у стенки ($T^+ = \text{Pr} y^+$ на границе), получается новое соотношение для температурного профиля:

$$T^+ = \begin{cases} \text{Pr} y^+, & \sqrt{\text{Pr}} y^+ \leq 5 \\ \sqrt{\text{Pr}} [5 \ln(\sqrt{\text{Pr}} y^+) - 3.05], & 5 < \sqrt{\text{Pr}} y^+ \leq 30 \\ \sqrt{\text{Pr}} [2.5 \ln(\sqrt{\text{Pr}} y^+) + 5.5], & \sqrt{\text{Pr}} y^+ > 30 \end{cases} \quad (14)$$

На рисунке 6 также представлены осредненные поля температуры, полученные по результатам настоящего DNS-расчета, а также по данным DNS [12] и по формулам (12)–(14). Видно, что данные настоящего DNS-расчета лучше согласуются с формулой (14) по сравнению с другими рассмотренными формулами. Также видно, что наблюдается тренд к наилучшему согласованию при увеличении числа Рейнольдса (такой же тренд наблюдался с формулой фон Кармана). Этот аспект также можно объяснить доминированием молекулярных сил при низких числах Рейнольдса. Для количественной оценки данного влияния удобно ввести аналог Рейнольдса трения – число Рейнольдса температуры трения ($\text{Re}_\theta = \text{Re}_\tau \text{Pr}^{0.5}$). Таким образом, если критерием применимости формулы (11) является достижение $\text{Re}_\tau \approx 70$, то для формулы (14) это будет одновременное выполнение $\text{Re}_\theta \approx 20$ и $\text{Re}_\tau \approx 70$ (рис. 6).

Одно из замыкающих соотношений, которое требуется учитывать при моделировании в RANS-приближении – турбулентное число Прандтля (Pr_t). Распространенной практикой является задание постоянного значения турбулентного числа Прандтля для теплоносителей $\text{Pr} \approx 1$, в то время как для теплоносителей с $\text{Pr} < 1$ распространенной является формула (Kays, Weigand, et al.) [18, 19]:

$$\text{Pr}_t = \{ \text{Pr}_{t\infty}^{-1} + 0.3 \text{Pe}_t \text{Pr}_{t\infty}^{-0.5} - (0.3 \text{Pe}_t)^2 \cdot [1 - \exp(-3.33 \text{Pr}_{t\infty}^{-1} \text{Pe}_t^{-1})] \}^{-1} \quad (15)$$

где:

$$\text{Pr}_{t\infty} = 0.85 + 100 \text{Re}^{-0.888} \text{Pr}^{-1} \quad (16)$$

В рамках настоящего DNS-исследования были определены значения турбулентного числа Прандтля (рис. 7). Выявлено, что для всех теплоносителей распределение турбулентного числа Прандтля (Pr_t) устроено схожим образом: максимум соответствует области $y^+ \approx 25$, а начиная со значения $y^+ \approx 50$ и далее, Pr_t принимает постоянное значение. При этом с ростом числа Прандтля или Рейнольдса среднее значение стремится к единице. Аппроксимируя данные DNS, получена новая формула для турбулентного числа Прандтля:

$$\text{Pr}_t = 3.95 \text{Pr}^{-0.33} \text{Re}^{-0.1975} \left[0.003 y^{+2} \exp(-y^{+2} 30^{-2}) + \tanh(y^+ 30^{-1}) \right] \quad (17)$$

Левая часть уравнения (17) характеризует изменение среднего Pr_t от Pr и Re , в то время как остальная часть уравнения – его пространственную неоднородность.

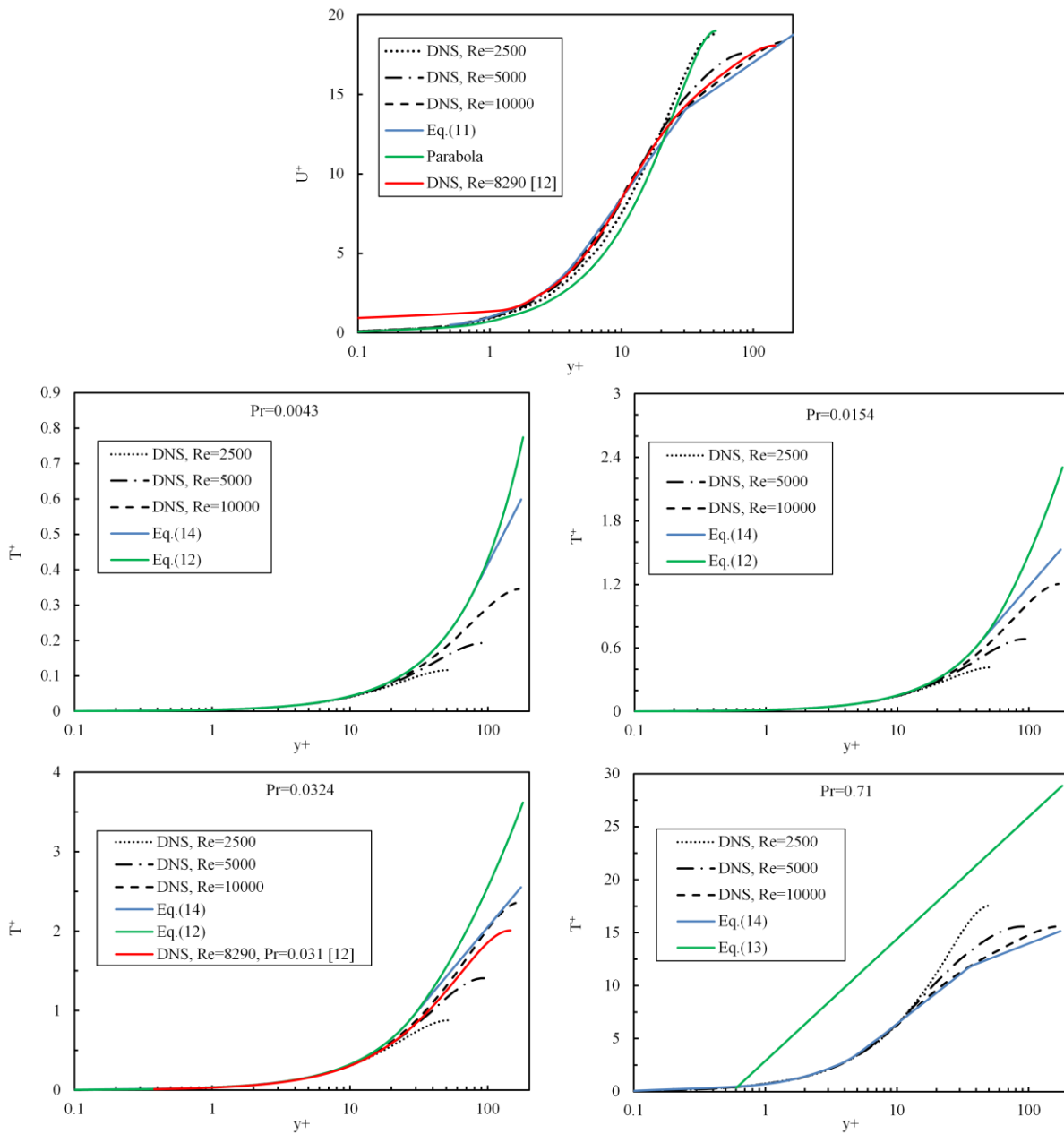


Рис. 6. Осредненные поля скорости и температуры вдоль линии CD

На рисунке 7 также представлены значения Pr_t , полученные по данным DNS [12] и по формулам (15) и (17). Видно, что формула (17) дает лучшее совпадение с данными DNS, в то время как данные DNS хорошо согласуются между собой.

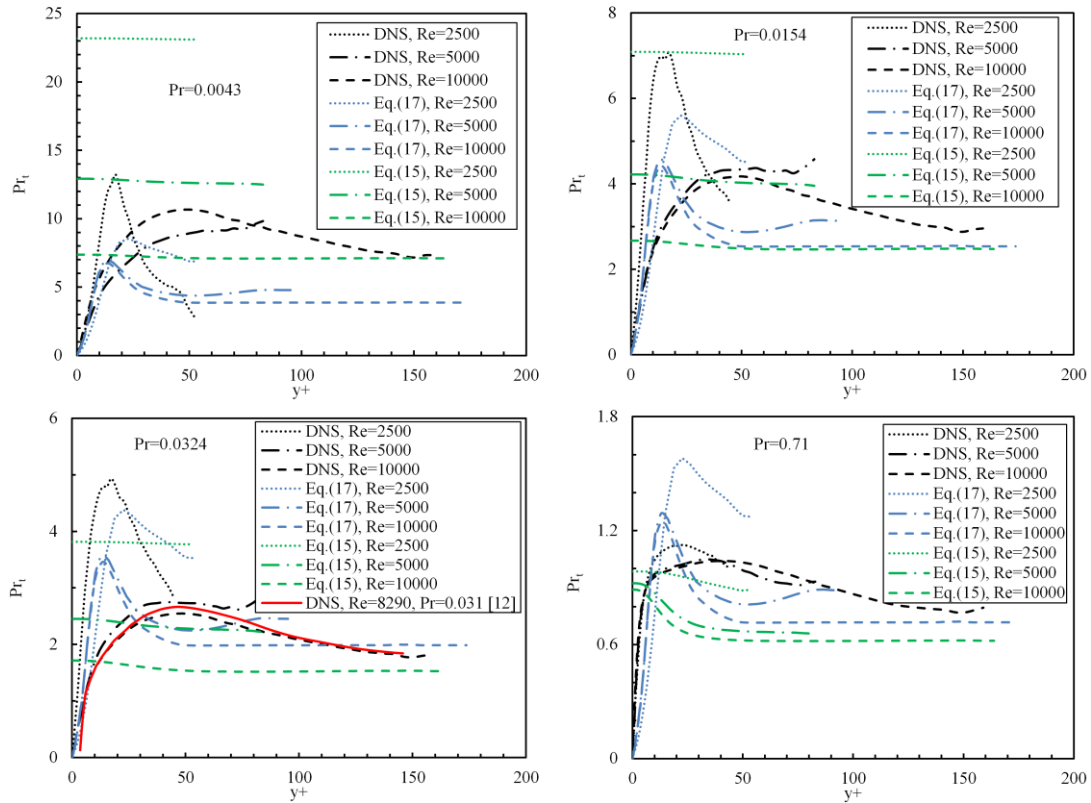


Рис. 7. Профили турбулентного числа Прандтля вдоль линии CD

2. RANS

Расчеты с использованием RANS выполнялись с применением CFD-кода StarCCM+.

В таблице 4 приведены параметры сеточных моделей, которые используются в расчетах с использованием RANS. Значения вязкого масштаба, используемые в таблице 4, приняты на основе данных настоящего DNS-исследования. Из таблицы 4 можно видеть, что длина расчетной области соответствует значению 10, при этом толщина пристеночной ячейки соответствует значению $\Delta y_w^+ = 1$.

Таблица 4

Параметры сеток, используемых в RANS расчетах

Re	N_{cell}	N_{rod}	N_z	Δy_w^+	$\Delta \phi^+$	Δz^+	Δy_c^+
2500	2.4×10^4	162	10	1.0	3.3	19.6	4.1
5000	5.1×10^4	234	10	1.0	4.1	35.3	5.1
10000	2.7×10^5	540	10	1.0	3.3	65.4	4.1

2.1. Исследования на немодифицированной модели турбулентности

Основываясь на данных работы [20], в которой проведено исследование течения и теплообмена в пучке стержней, для выполнения последующих модификаций выбрана двухслойная RANS модель турбулентности $k-\epsilon$ realizable. Этот выбор обусловлен двумя причинами. Во-первых, указанная модель турбулентности обладает наименьшей чувствительностью полученного решения от расчетной сетки [20]. Во вторых – указанная

модель турбулентности, использующая формулу Колмогорова для определения турбулентной вязкости [21] ($\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$), учитывает неоднородность параметра C_μ [22]:

$$C_\mu = \left\{ 4 + \sqrt{6} \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{6} \frac{S^3}{\sqrt{S:S}} \right) \right] \sqrt{S:S + W:W} \frac{k}{\varepsilon} \right\}^{-1} \quad (18)$$

В силу простоты и робастности, расчет турбулентного теплового потока проводится с использованием модели изотропной градиентной диффузии. Для определения влияния Pr_t на полученное решение, принято провести расчет с использованием двух моделей: $Pr_t=0.9$ и Pr_t , который рассчитывается по формуле (15).

В таблице 5 представлены расчетные значения коэффициентов трения и чисел Нуссельта, полученные на немодифицированной модели турбулентности. Можно видеть, что погрешность определения коэффициента трения (данные DNS выбраны в качестве эталона) составляет приблизительно 30 %, в то время как погрешность определения числа Нуссельта составляет 14 % и 7 % для $Pr_t=0.9$ и Pr_t , вычисленного по формуле (15) соответственно. При этом максимальная погрешность – 49 % соответствует $Re=2500$, что вероятно связано с тем, что выбранная модель турбулентности некорректно рассчитывает перемежаемый режим течения.

Таблица 5

Значения коэффициентов трения и чисел Нуссельта, рассчитанные на немодифицированной модели турбулентности для $Pr_t = 0.9$ и для Pr_t вычисленного по формуле (15)

Re	FF	Nu _s , Pr=0.0043: Pr _t =0.9, Kays	Nu _s , Pr=0.0154: Pr _t =0.9, Kays	Nu _s , Pr=0.0324: Pr _t =0.9, Kays	Nu _s , Pr=0.71: Pr _t =0.9, Kays
2500	0.0720	13.1, 13.0	13.2, 13.0	13.5, 13.1	19.6, 17.9
5000	0.0515	13.6, 13.4	14.2, 13.5	14.9, 13.8	28.2, 25.8
10000	0.0389	14.1, 13.6	15.2, 13.9	16.7, 14.7	42.5, 39.4

Для анализа погрешностей интегральных характеристик течения удобно изучить распределение турбулентной вязкости и C_μ (рис. 8). Видно, что число Рейнольдса 2500 соответствует максимальному отклонению турбулентной вязкости. В то же время, в связи с тем, что турбулентная температуропроводность также определяется турбулентной вязкостью, ее максимальная погрешность соответствует значению 26800 % (при $Pr_t=0.0043$ и $Re=2500$). На фоне указанной погрешности, ошибка определения турбулентного числа Прандтля не столь значительна. Причина, по которой эта погрешность приводит к значительным отклонениям, является незначительная роль турбулентной теплопередачи – около 0.1 % (рис. 3). Таким образом, основной причиной ошибки выбранной RANS-модели турбулентности является существенное завышение турбулентной вязкости. Также из рисунка 8 видно, что неоднородности C_μ в RANS-моделировании близки к максимальному значению 0.25 (см. уравнение (18)) на максимальном расстоянии от стенки. Это связано с минимальным градиентом поля скорости в рассматриваемом месте. Кроме того, эта ошибка распространяется на турбулентную вязкость и турбулентное число Прандтля, рассчитанное по формуле (15), поскольку турбулентное число Пекле зависит от турбулентной вязкости.

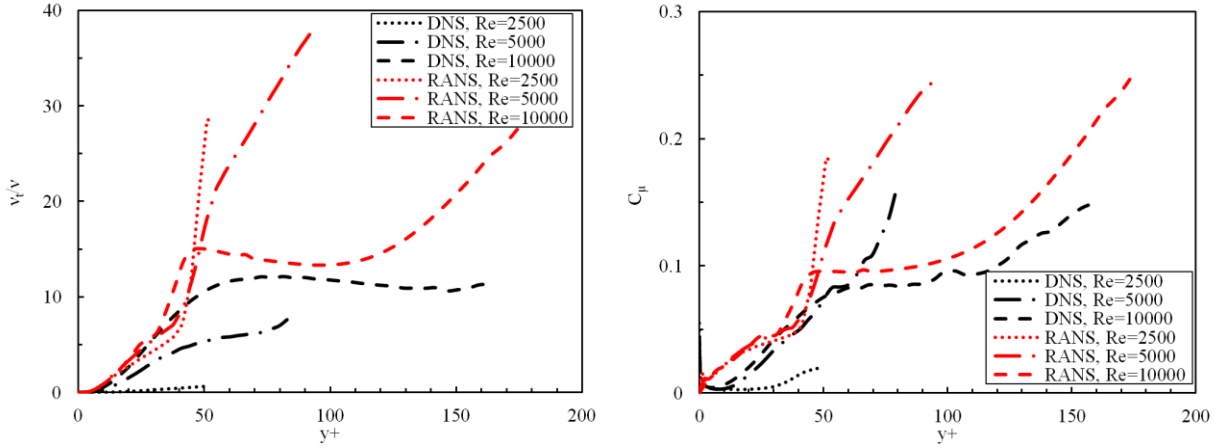


Рис. 8. Распределение турбулентной вязкости и C_μ вдоль линии CD, построенные по данным DNS и немодифицированной модели турбулентности

2.2. Исследования на модифицированной модели турбулентности

В связи с некорректностью вычисления турбулентной вязкости, а также турбулентного числа Прандтля принято их скорректировать. Модель турбулентного числа Прандтля выбирается в соответствии с уравнением (17). Для модификации турбулентной вязкости использовался метод, в котором начальная коррекция фокусировалась на последнем замыкающем коэффициенте модели, следующая коррекция – на предыдущем коэффициенте и т. д. В текущей модели турбулентности последний коэффициент модели – C_μ . На основе данных DNS, а также с учетом функции активации (во избежание случайных ошибок вне рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса) получена новая формула C_μ :

$$C_\mu = (1 - f_s \cdot \alpha_1) \left\{ 4 + \sqrt{6} \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{6} \frac{S^3}{2^{2/3} \sqrt{S:S}} \right) \right] \sqrt{S:S + W:W} \frac{k}{\varepsilon} \right\}^{-1} \quad (19)$$

здесь: $f_s = \{1 (2500 \leq Re \leq 10000), 0 (2500 > Re > 10000)\}$ – функция активации, $\alpha_1 = 4.43 - 0.454 \ln(Re)$ – модифицируемый параметр C_μ .

Из уравнений (18) – (19) видно, что при выходе чисел Рейнольдса из рассматриваемого диапазона, параметр C_μ определяется в соответствии с неизменной моделью турбулентности. Это сделано в силу отсутствия исследований о работе модели турбулентности вне рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса.

Следует отметить, что параметр α_1 является зависимым от числа Рейнольдса, в силу простой имплементации (по аналогии с тем, как это представлено в формуле (16)). Между тем, в качестве альтернативы, в работе [20] показан способ, ориентированный на определение интегральных параметров течения из локальных характеристик потока для рассматриваемого случая:

$$y^+ \approx 3.4 (y/\eta)^{1.04} \quad (20)$$

$$Re \approx \begin{cases} 2500, & 2500 > Re^* \\ Re^*, & 2500 \leq Re^* \leq 10000 \\ 10000, & Re^* > 10000 \end{cases} \quad (21)$$

$$Re^* = \exp \left(6.82 + 10 \min \left[\left(\sqrt{2k/3}/U_z \right) \exp(0.0126 y^+), 1.4 \right] \right) \quad (22)$$

здесь: $\eta=(v^3/\varepsilon)^{0.25}$ – масштаб Колмогорова, y – расстояние от стенки, $k=0.5\langle u_i'u_i' \rangle$ – кинетическая энергия турбулентности.

Следующим модифицируемым параметром модели является соотношение для кинетической энергии турбулентности (так, как параметр ε , входящий в формулу Колмогорова, входит также и в k):

$$\partial(\rho k)/\partial t + \nabla(\rho k \mathbf{U}) = \nabla[(\mu + \mu_t \sigma_k^{-1}) \nabla k] + P_k - \rho \varepsilon + S_k \quad (23)$$

где: $S_k=0.25f_s P_k$ – источниковое слагаемое, значение которого принято на основе данных DNS.

На рисунке 9 представлено распределение турбулентной вязкости и C_μ , вычисленные по модифицированной модели турбулентности.

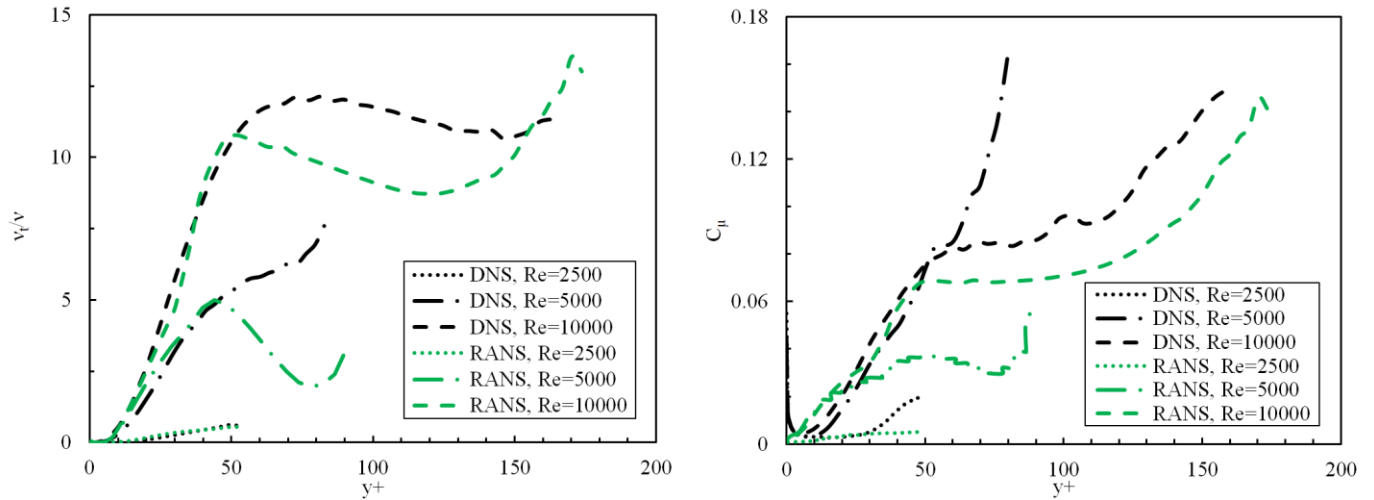


Рис. 9. Распределение турбулентной вязкости и C_μ вдоль линии CD, построенные по данным DNS и модифицированной модели турбулентности

Из рисунка (9) видно, что основные характеристики, определяющие структуру турбулентного течения, определяются удовлетворительно. Некоторые локальные отклонения присутствуют, но они не влияют на основные характеристики течения: коэффициент трения и числа Нуссельта, которые приведены в таблице 6. Из этой таблицы 6 видно, что максимальная погрешность не превышает 4 %, тогда как ее среднее значение составляет 1 %.

На рисунке 10 представлены поля скорости и температуры вдоль линии CD, построенные по данным DNS, модифицированной и немодифицированной модели турбулентности. Можно видеть, что модифицированная модель турбулентности лучше согласуется с данными DNS.

Значения коэффициентов трения и чисел Нуссельта, рассчитанные на модифицированной модели турбулентности

Re	FF	Nu _s , Pr=0.0043	Nu _s , Pr=0.0154	Nu _s , Pr=0.0324	Nu _s , Pr=0.71
2500	0.0487	12.5	12.5	12.5	12.8
5000	0.0417	13.1	13.2	13.4	22.0
10000	0.0329	13.5	13.8	14.4	36.1

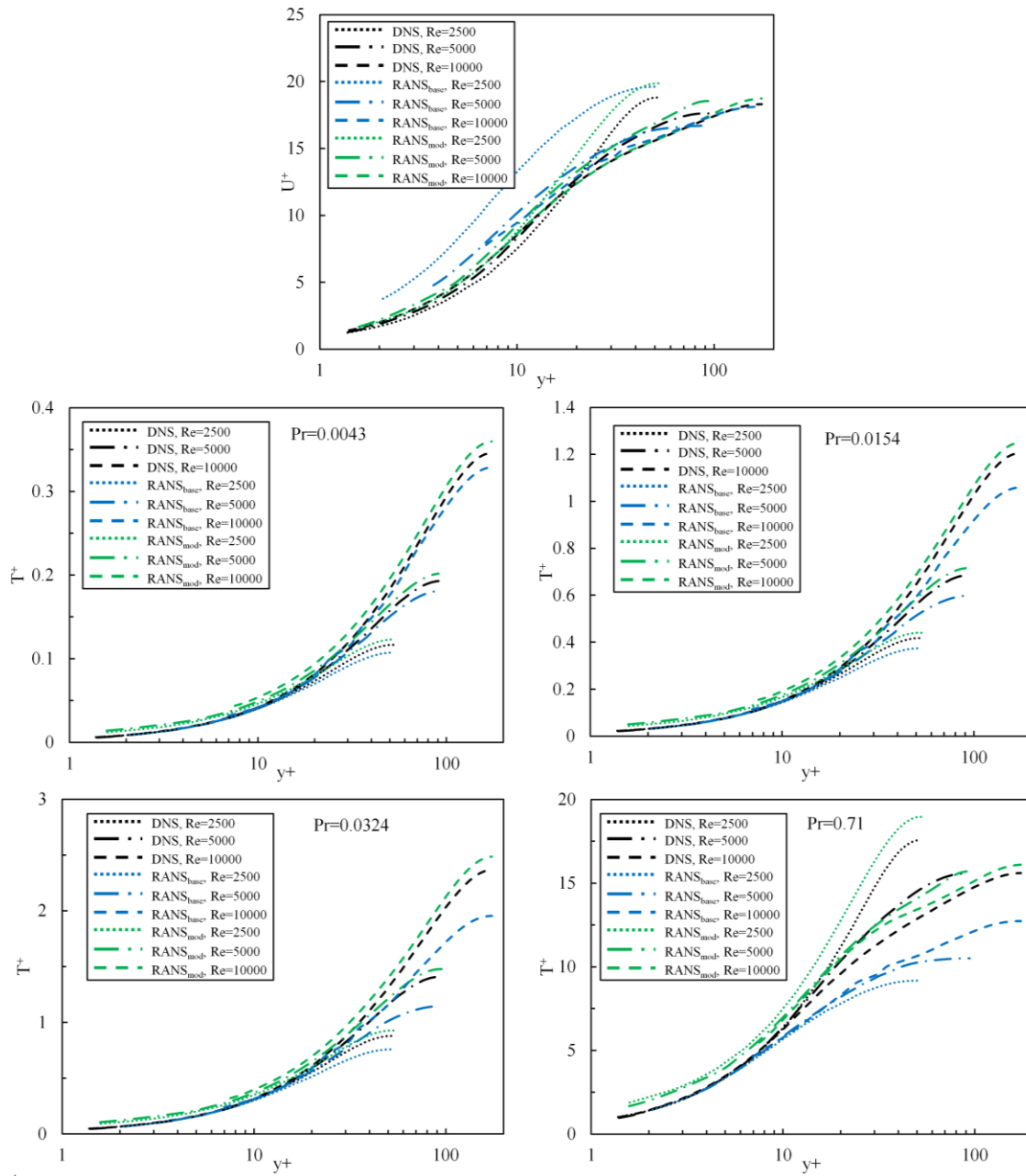


Рис. 10. Поля скорости и температуры вдоль линии CD, построенные по данным DNS, модифицированной и немодифицированной модели турбулентности

Заключение

В этой статье демонстрируется пример использования данных DNS для улучшения RANS модели турбулентности. Многократное снижение погрешности говорит в пользу о работоспособности предложенного подхода. Достижения дают надежду на то, что при необходимости можно будет расширить рассматриваемый диапазон определяющих параметров за счет введения новых данных, полученных из DNS или из экспериментов. Кроме того, использование функции активации в модифицированной модели турбулентности позволяет использовать ее в настоящих расчетах. В этом отношении модификации можно рассматривать как улучшение выбранной модели турбулентности в отношении моделирования пучков стержней на малых числах Рейнольдса.

В рамках анализа первопричин погрешности RANS-модели турбулентности было выявлено, что основным источником погрешности является некорректное определение турбулентной вязкости. По этой причине использование моделей турбулентного числа Прандтля, в которых турбулентная вязкость является аргументом, оправдано в случае ее корректного моделирования.

По данным DNS сформулировано уравнение для турбулентного числа Прандтля, выявлены закономерности теплообмена, сформулировано уравнение для температурного профиля. Эти результаты могут быть использованы в дальнейшем в различных приложениях. Особенно профиль температуры: так же как и формула для распределения скорости – формула фон Кармана, настоящая формула для распределения температуры может быть использована как в экспериментальной деятельности (определение температуры стенки через температуру потока), так и в CFD-кодах (температурная функция стенки).

В представленных DNS исследованиях не был выбран метод пространственной дискретизации высокого порядка, тогда как разрешение сетки по нормали к стенке примерно на 30 % грубее по сравнению с работой [23], которую часто используют в качестве эталона. Несмотря на это, получено хорошее согласие с данными DNS высокого порядка [12] и со справочными данными. Этот аспект, вероятно, говорит о скрытых механизмах, делающих турбулентное течение устойчивым к несовершенным средствам их моделирования.

Благодарности

Автор выражает благодарность D. Angeli и П. Лобанову за предоставление результатов моделирования и за экспериментальные данные, которые использовались при валидации.

Список литературы

1. V.M. Budov, V.V. Steklov, et al. RD 24.035.05-89. Thermal and hydraulic calculation of NPP heat exchange equipment. UDC 66.045.1.001.24 (083.75). Leningrad. NPO CKTI (1991).
2. Ushakov, P., Zhukov, A., Matyukhin, N., 1977. Heat transfer to liquid metals in regular arrays of fuel elements. High Temp. (USSR) 15 (10), 1027–1033.
3. M.A. Mikheev, I.M. Mikheeva. Basics of heat transfer. Moscow "ENERGY" (1977).
4. G.K. El Khoury, P. Schlatter, A. Noorani, P.F. Fischer, G. Brethouwer, A.V. Johansson, Direct numerical simulation of turbulent pipe flow at moderately high Reynolds numbers, Flow Turbul. Combust. 91 475–495, [https:// doi.org/10.1007/s10494-013-9482-8](https://doi.org/10.1007/s10494-013-9482-8) (2013).

5. M. Piller, Direct numerical simulation of turbulent forced convection in a pipe, *Int. J. Numer. Meth. Fl.* 49 583–602, <https://doi.org/10.1002/fld.994> (2005).
6. STAR-CCM+Version 12.06, CFD code developed by Cd-Adapco. User guide.
7. Patankar, S.V., and Spalding, D.B., A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 1787–1806 (1972).
8. D. Taler, J. Taler, Simple heat transfer correlations for turbulent flow, *E3S Web of Conferences* 13, 02008 (2017), doi: 10.1051/e3sconf/20171302008.
9. S.M. Yahya, S.F. Anwer, S. Sanghi. Turbulent forced convective flow in an anisothermal channel. *Int. J. of Thermal Sciences*, 88, pp. 84–95 (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.09.010>.
10. O. N. Kashinsky, D. V. Kulikov, P. D. Lobanov, N. A. Pribaturin and A. I. Svetonosov. *Thermophys. Aeromech.* 25(2) 219–23 (2018).
11. J. Pacio, K. Litfin, A. Batta, M. Viellieber, A. Class, H. Doolaard, F. Roelofs, S. Manservigi, F. Menghini, M. Böttcher. Heat transfer to liquid metals in a hexagonal rod bundle with grid spacers: Experimental and simulation results. *Nuclear Engineering and Design.* 290, 27–39 (2015).
12. D. Angeli, A. Fregni, E. Stalio. Direct numerical simulation of turbulent forced and mixed convection of LBE in a bundle of heated rods with $P/D=1.4$. *Nuclear Engineering and Design.* 355, 110320 (2019).
13. Karman T., von. The analogy between fluid friction and heat transfer, *Trans. ASME* 61:705–710 (1939).
14. Kirillov P.L. Generalization of experimental data on heat transfer in liquid metals. – "Atomic Energy", v. 13, issue 5, p. 481(1962).
15. Monin A.S., Yaglom A.M. Statistical fluid mechanics. M., "Science", part 1, 1965; Part 2 (1967).
16. K. M. Sergeenko, V. M. Goloviznin, V. Yu. Glotov, LES-simulation of heat transfer in a turbulent pipe flow with lead coolant at different Reynolds numbers, *Matem. Mod.*, 30:7, 29–46 (2018).
17. Hinze, J.O. (1975), *Turbulence*. 2nd edition, McGraw- Hill Publishing Co., New York.
18. Kays, W.M., Crawford, M.E., *Convective Heat and Mass Transfer*, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, New York. (1980).
19. Weigand B., Ferguson J.R., Crawford, M.E., An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number. *Int. J. Heat Mass Transfer* 40, pp. 4191–4196 (1997).
20. Sergeenko K. PhD dissertation. <https://mpei.ru/diss/Lists/FilesDissertations/597–Диссертация.pdf>, Moscow. (2022).
21. Garbaruk A. Lecture 11: «Some specific of using turbulence models». SPbPU. https://cf.spbstu.ru/agarbaruk/turb_models/Term8_Lec11_RANS_specific.pdf, St.Petersburg (2019).
22. Shih T.H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z. and Zhu. J. A New Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Development and Validation. *Computer Fluids.* Vol. 24(3), pp. 227–238 (1995).
23. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids.* 1999. 11 (4). 943–945.