

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ПОВЕРХНОСТНЫХ ПСЕВДОИСТОЧНИКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОГРУППОВОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Султанов Н.В. (НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия)

Введение

Метод поверхностных псевдоисточников [1] нашел свое применение для решения уравнения переноса нейтронов в основном в простых цилиндрических ячейках ядерных реакторов. Этот метод позволяет рассчитывать с достаточной точностью для практики как интегральные, так и локальные характеристики ячеек. Но кассеты тепловых реакторов (например, ВВЭР), да и быстрых реакторов имеют сложную структуру с чередованием твэлов с размножением, выгоранием и поглощением. Для их расчета требуется разрабатывать новые подходы, что и делается в данной работе с методом поверхностных псевдоисточников. В этом методе используется Функция Грина уравнения переноса нейтронов для бесконечной среды. Как правило, у функции Грина начальные и конечные переменные записаны в одной и той же системе координат, например, в цилиндрической ячейке. Но часто встречаются случаи, когда требуется знание функции Грина, начальные и конечные переменные у которой записаны в различных системах координат, например, в кластерных зонах топливной ячейки РБМК (рис. 1.) . Поэтому ниже будут приведены преобразования начальных или конечных переменных функции Грина к нужной системе координат. Оказалось, что эти преобразования лучше делаются для функции Грина, разложенной в ряд по сферическим гармоникам, и с привлечением теории представления групп.

1. Метод поверхностных псевдоисточников

В методе поверхностных псевдоисточников [1] функция распределения нейтронов в зоне z имеет следующий вид

$$\Psi^z(r, \Omega) = \int_{V, \Omega'} S^z(r', \Omega') G^z(r, \Omega/r', \Omega') dr' d\Omega' + \int_{S, \Omega'} g(r', \Omega') G^z(r, \Omega/r', \Omega') dr' d\Omega' \quad (1)$$

где z – индекс зоны;

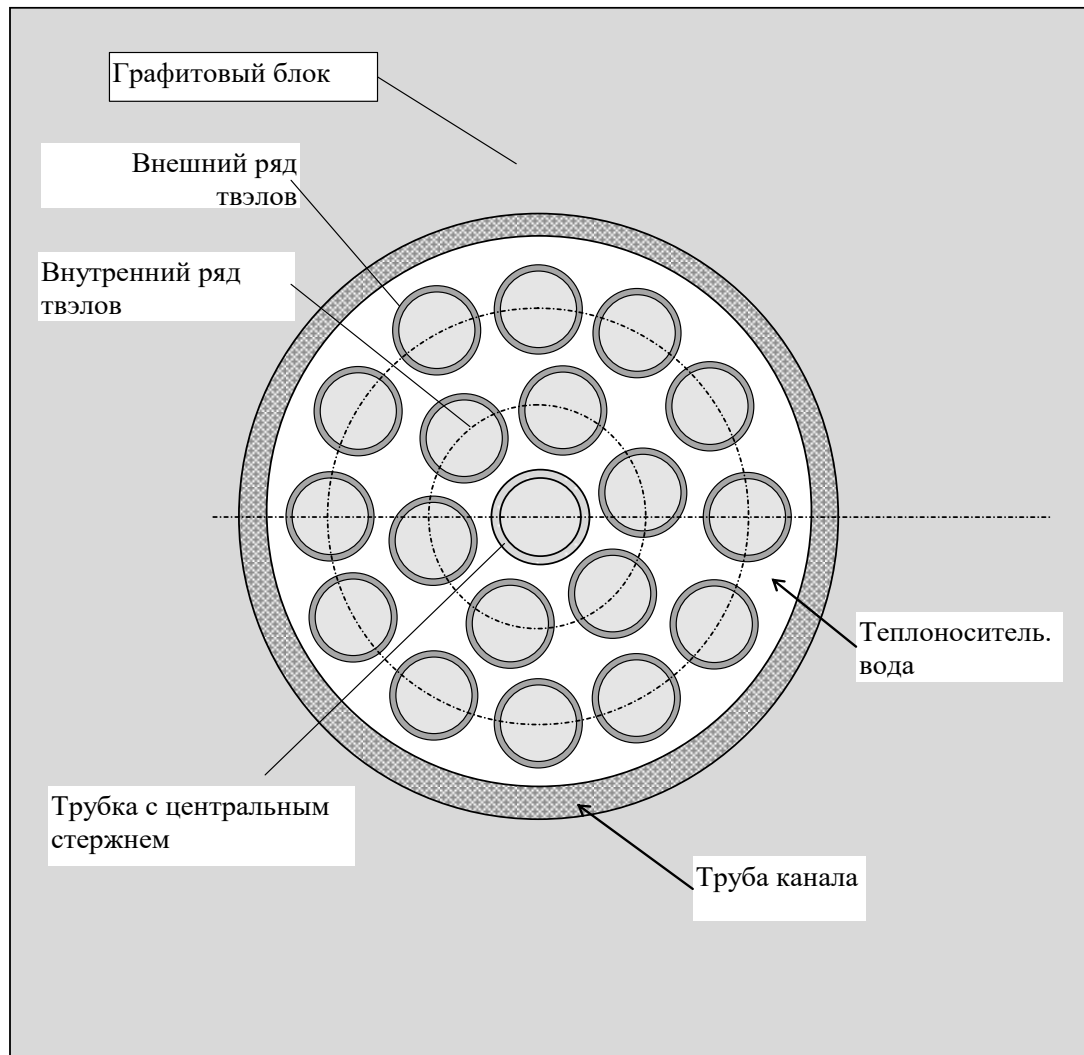
$S^z(r', \Omega')$ – функция, совпадающая с функцией источника нейтронов в пределах зоны z и естественным образом продолженная вне ее;

$G^z(r, \Omega/r', \Omega')$ – функция Грина для однородной бесконечной среды с теми же сечениями, что и в зоне z ;

$g(r', \Omega')$ – поверхностные псевдоисточники зоны z , расположенные на поверхностях зоны z ;

Двумерная функция Грина [2] представляется через регулярные $\phi_{\nu, p}^m(r, \Omega)$ [3] и сингулярные $\psi_{\nu, p}^m(r, \Omega)$ [3] вещественные цилиндрические элементарные решения двумерного уравнения переноса нейтронов в виде

$$G(r, \Omega/r', \Omega') = \begin{cases} \sum_{p=1}^1 \sum_{m=0}^{\infty} \int_V \frac{[\psi_{\nu, p}^m(r', \Omega')]^+ [\phi_{\nu, p}^m(r, \Omega)]}{\nu N(\nu, m, p)} d\nu \dots \dots r' \geq r \\ \sum_{p=1}^1 \sum_{m=0}^{\infty} \int_V \frac{[\phi_{\nu, p}^m(r', \Omega')]^+ [\psi_{\nu, p}^m(r, \Omega)]}{\nu N(\nu, m, p)} d\nu \dots \dots r' \leq r \end{cases} \quad (2)$$



Трубка с центральным стержнем

ТВЭЛ

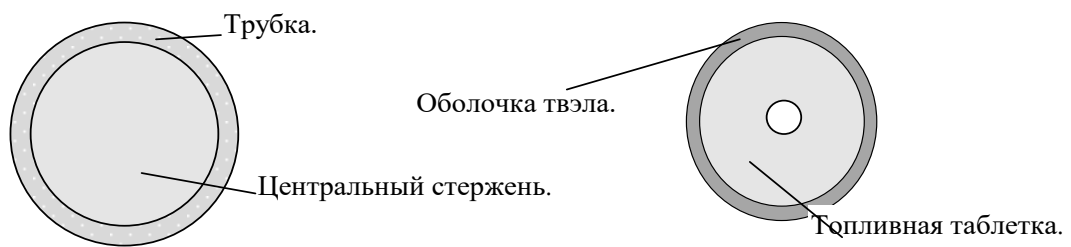


Рис. 1. Поперечное сечение кластерной ячейки РБМК с топливом

где для m четных

$$\psi_{v,p}^m(\rho, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+\delta_{k,0}} P_{k,0}^n\left(\frac{\Omega\rho}{\rho}\right) 2 \cos k \phi_p * \left\{ F_{k,m}^{n,p}\left(\frac{\rho}{v}\right) 4 \cos p \alpha_0 \delta_{k,k_{even}} + \hat{F}_{k,m}^{n,p}\left(\frac{\rho}{v}\right) 4 \sin p \alpha_0 \delta_{k,k_{odd}} \right\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F_{m,k}^{n,p}\left(\frac{\rho}{v}\right) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\rho c h \zeta / v} [P_{m,k}^n(-c h \zeta) + (-1)^k P_{m,-k}^n(-c h \zeta)] \cos p \zeta d\zeta \\ \tilde{F}_{m,k}^{n,p}\left(\frac{\rho}{v}\right) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{\rho c h \zeta / v} [P_{m,k}^n(-c h \zeta) - (-1)^k P_{m,-k}^n(-c h \zeta)] \sin p \zeta d\zeta \\ A_n^m(v) &= \begin{cases} P_n(v) - cv[Q_0(v)P_n(v) - Q_n(v)] \dots \text{when} \dots v \in [-1,1] \\ cv_0 Q_0(v_0) \dots \text{when} \dots v_0 \notin [-1,1], \dots \text{when} \dots m = 0 \\ P_{m,0}^n(v_0)(-1)^m, \dots \dots \text{when} \dots m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

для m нечетных

$$\begin{aligned} \psi_{v,p}^m(\rho, \alpha, \Omega) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+\delta_{k,0}} P_{k,0}^n\left(\frac{\Omega\rho}{\rho}\right) 2 \cos k \phi_\rho * \\ &\left\{ -F_{k,m}^{n,p}\left(\frac{\rho}{v}\right) 4 \sin p \alpha_0 \delta_{k,k_{\text{odd}}} + \tilde{F}_{k,m}^{n,p}\left(\frac{\rho}{v}\right) 4 \cos p \alpha_0 \delta_{k,k_{\text{even}}} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Двумерные регулярные цилиндрические решения имеют вид выражений (3) и (4), в которых функции $F_{m,l}^{n,p}\left(\frac{R}{v}\right)$ и $\tilde{F}_{m,l}^{n,p}\left(\frac{R}{v}\right)$ заменены на $\Phi_{m,l}^{n,p}\left(\frac{R}{v}\right)$ и $\hat{\Phi}_{m,l}^{n,p}\left(\frac{R}{v}\right)$ соответственно. Так как в преобразовании сингулярных и регулярных цилиндрических элементарных решений к новой системе координат много общего, то детально будут преобразовываться будут сингулярные решения. Там, преобразования регулярных решений будет отличаться, будут даны уточнения.

2. Преобразование двумерной функции Грина к различным системам координат

2.1. Случай, когда $r \geq \rho$

Будем рассматривать случай влияния выделенного блокка на соседний блок в ячейке (рис. 2.). Наша задача: угловые моменты двумерной функции Грина, записанные в системе координат выделенного блокка O_1 и симметричной относительно оси OO_1 , записать в системе координат блокка O_2 , которая симметрична относительно оси OO_2 . То есть двумерное сингулярное элементарное решение, записанное в системе координат блокка с осью O_1 , необходимо записать в системе координат блокка с осью O_2 .

Далее перейдем от вещественных двумерных сингулярных элементарных решений (3)–(4) к комплексным двумерным сингулярным элементарным решениям

$$\partial_p^m(v, R, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k=-n}^n \bar{F}_{k,m}^{n,p}\left(\frac{R}{v}\right) Y_n^k(\Omega) e^{ip\alpha}, \quad (5)$$

где $Y_n^k(\Omega) = P_{k,0}^n\left(\frac{\Omega\rho}{\rho}\right) e^{ik\phi}$ – сферические гармоники

$$\bar{F}_{k,m}^{n,p}\left(\frac{R}{v}\right) = i^{m+k} \sum_{k'=-n}^n P_{k,k'}^n(0) P_{m,k'}^n(0) \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{R c h \zeta}{v}} [(-1)^k e^{-(p-k')\zeta} + (-1)^m e^{(p+k')\zeta}] d\zeta \quad (6)$$

$$\bar{\Phi}_{m,k}^{n,p}\left(\frac{R}{v}\right) = i^{m+k} \sum_{k'=-n}^n P_{k,k'}^n(0) P_{m,k'}^n(0) \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-\frac{R \cos \zeta}{v}} [(-1)^k e^{-i(p-k')\zeta} + (-1)^m e^{i(p+k')\zeta}] d\zeta$$

Вещественные цилиндрические элементарные решения, записанные в виде (3) и (4), получаются из следующих комбинаций комплексных цилиндрических элементарных решений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [\partial_p^m(v, R, \alpha, \Omega) + \partial_p^{-m}(v, R, \alpha, \Omega) + \partial_{-p}^m(v, R, \alpha, \Omega) + \partial_{-p}^{-m}(v, R, \alpha, \Omega)] \\ \frac{1}{4} [\partial_p^m(v, R, \alpha, \Omega) + \partial_p^{-m}(v, R, \alpha, \Omega) - \partial_{-p}^m(v, R, \alpha, \Omega) - \partial_{-p}^{-m}(v, R, \alpha, \Omega)] \end{aligned} \quad (7)$$

Будем отсчитывать пространственный аксиальный угол α от прямой, соединяющей центр симметрии центрального канала O с осью центра симметрии

цилиндрических блоков O_1 , O_2 и т.д., против часовой стрелки. В комплексном цилиндрическом элементарном решении (3) перейдем к новому углу $\alpha_1 = \alpha - \alpha_0$, отсчитываемого от прямой O_1O_2 против часовой стрелки. Наше преобразование полученного цилиндрического элементарного решения начнем с преобразования сферических функций $Y_n^k(\Omega)$. Вначале преобразования будут проходить в верхней полуплоскости (полуплоскость выше Γ). Напомним, что R расстояние от оси O_1 ; θ – полярный угол направления полета нейтрона Ω относительно вектора R ; ϕ – азимутальный угол вектора Ω , отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора R . Введем расстояния и углы точки R в цилиндрической системе координат с осью O_2 ; θ_1 – угол между векторами R и ρ ; θ_2 – полярный угол вектора Ω относительно вектора ρ ; ϕ' – азимутальный угол вектора Ω относительно вектора ρ , отсчитываемый против часовой стрелки.

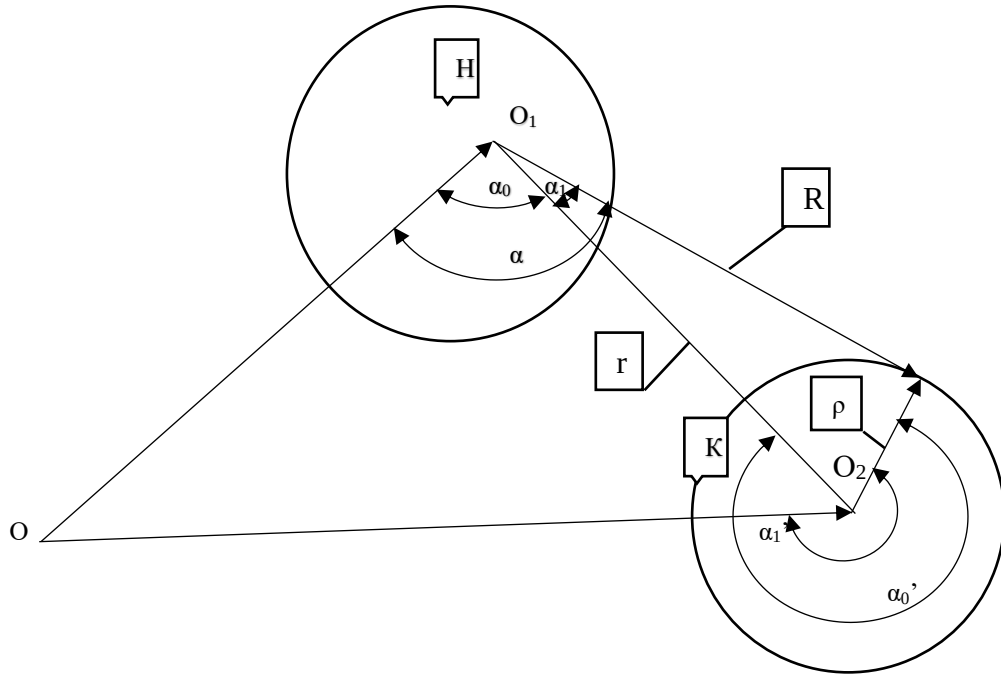


Рис. 2. Координаты и углы для случая, когда $\rho \leq r$

Известно [4 стр. 138], что, если углы θ , ϕ и θ_1 , θ_2 , ϕ' удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Re } \theta < \pi, \quad 0 \leq \text{Re } \phi < 2\pi, \quad -2\pi \leq \text{Re } \psi < 2\pi, \\ \cos \theta &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi', \\ e^{i\phi} &= \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi' + i \sin \theta_2 \sin \phi'}{\sin \theta}, \\ e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}} &= \frac{\cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{\frac{i\phi'}{2}} - \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{-\frac{i\phi'}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

то для функций $Y_n^k(\Omega)$ выполняется следующая теорема сложения в верхней полуплоскости (полуплоскость выше Γ рис. 2.):

$$Y_n^k(\Omega) = P_{k,0}^n(\cos \theta) e^{ik\phi} = \sum_{k'=-n}^n e^{ik'\phi'} P_{k',0}^n(\cos \theta_2) P_{k',k}^n(\cos \theta_1) (-1)^{k'}. \quad (9)$$

При преобразовании сферических функций $Y_n^k(\Omega)$ в нижней полуплоскости условия (8) будут выполняться для углов θ , $(\pi-\Phi)$ и θ_1 , θ_2 , $(\pi-\Phi')$, а теорема сложения запишется в виде

$$Y_n^k(\Omega) = P_{k,0}^n(\cos \theta) e^{ik\phi} = \sum_{k'=-n}^n e^{ik'\phi'} P_{k',0}^n(\cos \theta_2) P_{k',k}^n(\cos \theta_1) (-1)^k \quad (10)$$

В выражениях (9) и (10) разложим $P_{k',k}^n(\cos \theta_1)$ в экспоненциальный ряд, воспользовавшись теоремой сложения для функций $P_{k',k}^n(\cos \theta)$ [4] при следующих соотношениях между углами: $\phi' = \pi - \theta_1$, $\theta_2 = \pi/2$, $\psi = 0$

$$P_{k',k}^n(\cos \theta_1) = i^{k'+k} \sum_{l'=-n}^n e^{-il'\theta_1} P_{k',l'}^n(0) P_{l',k}^n(0) \quad (11)$$

Подставив разложение (11) в разложения (9) и (10), запишем последние в виде одной формулы

$$Y_n^k(\theta_1, \Phi) = \sum_{k'=-n}^n e^{ik'\phi'} P_{k',0}^n(\cos \theta_2) i^{k'+k} \sum_{l'=-n}^n e^{il'\theta_1} P_{k',l'}^n(0) P_{l',k}^n(0) \left[\frac{(-1)^{k'}}{(-1)^k} \right] \quad (12)$$

здесь в квадратных скобках верхнее значение относится к верхней полуплоскости, а нижнее – к нижней.

Вернемся к комплексным цилиндрическим элементарным решениям (5) и выпишем сумму по k

$$\sum_{k=-n}^n \bar{F}_{k,m}^{n,p} \left(\frac{R}{v} \right) Y_n^k(\Omega) \quad (13)$$

Подставим в сумму (13) выражения (6) и (12) для функций $\bar{F}_{m,k}^{n,p} \left(\frac{R}{v} \right)$ и $Y_n^k(\Omega)$ соответственно и после ряда несложных преобразований получим

$$\sum_{k'=-n}^n e^{ik'\phi'} P_{k',0}^n(\cos \theta_2) i^{k'+k} \sum_{l'=-n}^n e^{il'\theta_1} P_{k',l'}^n(0) \sum_{k''=-n}^n P_{m,k''}^n(0) * \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{Rch\zeta}{v}} \sum_{k=-n}^n (-1)^k P_{l',k}^n(0) P_{k,k''}^n(0) [(-1)^k e^{-(p-k'')\zeta} + (-1)^m e^{(p+k'')\zeta}] \left[\frac{(-1)^{k'}}{(-1)^k} \right] d\zeta$$

Выделим сумму по k из (14) для верхней и нижней относительно отрезка r полуплоскостей в виде

$$\left[\begin{aligned} & (-1)^{k'} \sum_{k=-n}^n P_{l',k}^n(0) P_{k,k''}^n(0) e^{-(p-k'')\zeta} + (-1)^m \sum_{k=-n}^n (-1)^k P_{l',k}^n(0) P_{k,k''}^n(0) e^{(p+k'')\zeta} \\ & \sum_{k=-n}^n (-1)^k P_{l',k}^n(0) P_{k,k''}^n(0) e^{-(p-k'')\zeta} + (-1)^m \sum_{k=-n}^n P_{l',k}^n(0) P_{k,k''}^n(0) e^{(p+k'')\zeta} \end{aligned} \right] \quad (15)$$

Воспользуемся частным случаем теоремы сложения [4]:

$$\sum_{k=-n}^n P_{l',k}^n(0) P_{k,k''}^n(0) = \delta_{l',k''} \quad (16)$$

Используя свойства функций $P_{k,-k''}^n(0) = (-1)^{n+k} P_{k,k''}^n(0)$ выражение (16) можно записать в виде

$$\sum_{k=-n}^n (-1)^k P_{l',k}^n(0) P_{k,k''}^n(0) = (-1)^n \delta_{l',k''} \quad (17)$$

Избавимся в формуле (15) от сумм по k, используя свойство ортогональности (16) и (17) функций $P_{k,k''}^n(0)$, получим

$$\left[\begin{aligned} & (-1)^{k'} \delta_{l',k''} e^{-(p-k'')\zeta} + (-1)^{n+m+k'} \delta_{l',-k''} e^{(p+k'')\zeta} \\ & (-1)^n \delta_{l',-k''} e^{-(p-k'')\zeta} + (-1)^m \delta_{l',k''} e^{(p+k'')\zeta} \end{aligned} \right] \quad (18)$$

Выделим из выражения (14) суммы по k'' и l', а сумму по k заменим выражением (18),

$$\sum_{k''=-n}^n P_{m,k''}^n(0) \sum_{l'=-n}^n e^{il'\theta_1} P_{k',l'}^n(0) \begin{bmatrix} (-1)^{k'} \delta_{l',k''} e^{-(p-k'')\zeta} + (-1)^{m+n+k'} \delta_{l',-k''} e^{(p+k'')\zeta} \\ (-1)^n \delta_{l',-k''} e^{-(p-k'')\zeta} + (-1)^m \delta_{l',k''} e^{(p+k'')\zeta} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Раскрывая квадратные скобки, избавляясь от суммы по l' и используя соотношение $P_{k,-k}^n(0) = (-1)^{n+k} P_{k,k}(0)$, выражение (19) примет вид

$$\sum_{k''=-n}^n P_{m,k''}^n(0) P_{k',k''}^n(0) \begin{bmatrix} (-1)^{k'} e^{-(p-k'')\zeta} e^{ik''\theta_1} + (-1)^m e^{(p+k'')\zeta} e^{-ik''\theta_1} \\ (-1)^k e^{-(p-k'')\zeta} e^{-ik''\theta_1} + (-1)^m e^{(p+k'')\zeta} e^{ik''\theta_1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Запишем комплексное сингулярное цилиндрическое элементарное решение (5) после проведенных преобразований в виде

$$\partial_p^m(v, R, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k'=-n}^n Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi) i^{k'+m} \sum_{k''=-n}^n P_{m,k''}^n(0) P_{k',k''}^n(0) * \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{Rch\zeta}{v}} \begin{bmatrix} (-1)^{k'} e^{-(p-k'')\zeta} e^{ik''\theta_1} + (-1)^m e^{(p+k'')\zeta} e^{-ik''\theta_1} \\ (-1)^k e^{-(p-k'')\zeta} e^{-ik''\theta_1} + (-1)^m e^{(p+k'')\zeta} e^{ik''\theta_1} \end{bmatrix} d\zeta e^{ip(\alpha_1+\alpha_0)} \quad (21)$$

Преобразование регулярного комплексного элементарного решения проводится по тем же формулам (14)–(20), так как оно не касается пределов интегрирования и подынтегральных компонент. Выпишем регулярное комплексное элементарное решение в явном виде

$$\rho_p^m(v, R, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k'=-n}^n Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi) i^{k'+m} \sum_{k''=-n}^n P_{m,k''}^n(0) P_{k',k''}^n(0) * \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{Rch\zeta}{v}} \begin{bmatrix} (-1)^{k'} e^{-i(p-k'')\zeta} e^{ik''\theta_1} + (-1)^m e^{i(p+k'')\zeta} e^{-ik''\theta_1} \\ (-1)^k e^{-i(p-k'')\zeta} e^{-ik''\theta_1} + (-1)^m e^{i(p+k'')\zeta} e^{ik''\theta_1} \end{bmatrix} d\zeta e^{ip(\alpha_1+\alpha_0)} \quad (22)$$

Используя формулы (7), перейдем к вещественным сингулярным цилиндрическим элементарным решениям вида

$$\psi_{v,p}^m(R, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k'=0}^n \frac{1}{1+\delta_{k',0}} Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi) \sum_{k''=0}^n \frac{i^{k'+m}}{1+\delta_{k'',0}} P_{k',k''}^n(0) \left[P_{k'',m}^n(0) + P_{k'',-m}^n(0) \right] * \frac{1}{2} \left\{ K_{p-k''} \left(\frac{R}{v} \right) \begin{bmatrix} (-1)^{k'} e^{i(p\alpha+\theta_1)} \pm (-1)^m e^{-i(p\alpha+k''\theta_1)} \\ (-1)^{k'} e^{i(p\alpha-k''\theta_1)} \pm (-1)^m e^{-i(p\alpha-k''\theta_1)} \end{bmatrix} + K_{p+k''} \left(\frac{R}{v} \right) \begin{bmatrix} (-1)^m e^{i(p\alpha-k''\theta_1)} \pm (-1)^{k'} e^{-i(p\alpha-k''\theta_1)} \\ (-1)^m e^{i(p\alpha+k''\theta_1)} \pm (-1)^{k'} e^{-i(p\alpha+k''\theta_1)} \end{bmatrix} \right\} \quad (23)$$

где $K_d(x) = \int_0^{\infty} e^{-xch\zeta} ch d\zeta$ -модифицированная функция Бесселя третьего рода; $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$.

Регулярное вещественное цилиндрическое элементарное решение примет вид

$$\Phi_{v,p}^m(R, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k'=0}^n \frac{1}{1+\delta_{k',0}} Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi) \sum_{k''=0}^n \frac{i^{k'+m}}{1+\delta_{k'',0}} P_{k',k''}^n(0) \left[P_{k'',m}^n(0) + P_{k'',-m}^n(0) \right] * \frac{1}{2} \left\{ I_{p-k''} \left(\frac{R}{v} \right) \begin{bmatrix} (-1)^{k'} e^{i(p\alpha+k''\theta_1)} \pm (-1)^m e^{-i(p\alpha+k''\theta_1)} \\ (-1)^{k'} e^{i(p\alpha-k''\theta_1)} \pm (-1)^m e^{-i(p\alpha-k''\theta_1)} \end{bmatrix} + I_{p+k''} \left(\frac{R}{v} \right) \begin{bmatrix} (-1)^m e^{i(p\alpha-k''\theta_1)} \pm (-1)^{k'} e^{-i(p\alpha-k''\theta_1)} \\ (-1)^m e^{i(p\alpha+k''\theta_1)} \pm (-1)^{k'} e^{-i(p\alpha+k''\theta_1)} \end{bmatrix} \right\} \quad (24)$$

где $I_d(x) = \frac{(-1)^d}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-xch\zeta} cos d\zeta$ -модифицированная функция Бесселя первого рода.

В верхней полуплоскости (рис. 2. выше γ) $\theta_1 = \alpha_1' - \pi - \alpha_1$, в нижней $\theta_1 = \alpha_1 - \pi - \alpha_1'$. После подстановки значений θ_1 и $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ в выражение (23) и ряда несложных преобразований выражение в фигурных скобках формулы (23) запишется

$$(-1)^{k''} K_{p-k''} \left(\frac{R}{v} \right) \left[(-1)^{k'} e^{i(p-k'')\alpha_1 + ip\alpha_0 + ik''\alpha_1'} \pm (-1)^m e^{-i(p-k'')\alpha_1 - ip\alpha_0 - ik''\alpha_1'} \right] + \\ + (-1)^{k''} K_{p+k''} \left(\frac{R}{v} \right) \left[(-1)^m e^{i(p+k'')\alpha_1 - ip\alpha_0 - ik''\alpha_1'} \pm (-1)^{k'} e^{-i(p+k'')\alpha_1 + ip\alpha_0 + ik''\alpha_1'} \right] \quad (25)$$

Такое же выражение мы получим и после преобразований в фигурных скобках формулы (24), только вместо функции $K_d(x)$ будут функции $I_d(x)$.

Далее воспользуемся теоремой сложения для модифицированных функций Бесселя третьего и первого родов [4,5]. Так как $\gamma \geq \rho$ и $\frac{R^2}{v^2} = \frac{r^2}{v^2} + \frac{\rho^2}{v^2} - 2 \frac{r\rho}{v^2} \cos(2\pi - \alpha_1')$, то

$$K_d \left(\frac{R}{v} \right) e^{\pm i d \alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{d+k} \left(\frac{r}{v} \right) I_k \left(\frac{\rho}{v} \right) e^{\pm i k (2\pi - \alpha_1')} \quad (26)$$

$$I_d \left(\frac{R}{v} \right) e^{\pm i d \alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k I_{k+d} \left(\frac{r}{v} \right) I_k \left(\frac{\rho}{v} \right) e^{\pm i k (2\pi - \alpha_1')} \quad (27)$$

Подставив в выражение (23) формулы (25) и (26) и введя новый аксиальный угол $\alpha' = \alpha_1' - \alpha_0$, мы придем после ряда преобразований к следующему виду вещественных сингулярных цилиндрических элементарных решений в новой системе цилиндрических координат относительно оси O_2 :

$$\psi_{v,p}^m(\rho, \alpha', \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k=0}^n \frac{Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi)}{1+\delta_{k',0}} \sum_{k''=0}^n \frac{i^{k'+m}}{1+\delta_{k'',0}} P_{k',k''}^n(0) [P_{k'',m}^n(0) + P_{k'',-m}^n(0)] * \\ * \frac{(-1)^{k''}}{2} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} I_{l-k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left[K_{l-p} \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^{k'} \pm (-1)^m] \cos(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) + [(-1)^{k'} \mp (-1)^m] \sin(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) \} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{l+p} \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^m \pm (-1)^{k'}] \cos(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) - [(-1)^m \mp (-1)^{k'}] \sin(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) \} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} I_{l+k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left[K_{l-p} \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^m \pm (-1)^{k'}] \cos(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) + [(-1)^m \mp (-1)^{k'}] \sin(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) \} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{l+p} \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^{k'} \pm (-1)^m] \cos(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) - [(-1)^{k'} \mp (-1)^m] \sin(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) \} \right] \right\} \quad (28)$$

Вещественные сингулярные цилиндрические элементарные решения в новой системе цилиндрических координат относительно оси O_2 выглядят следующим образом:

$$\phi_{v,p}^m(\rho, \alpha', \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k=0}^n \frac{Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi)}{1+\delta_{k',0}} \sum_{k''=0}^n \frac{i^{k'+m}}{1+\delta_{k'',0}} P_{k',k''}^n(0) [P_{k'',m}^n(0) + P_{k'',-m}^n(0)] * \\ * \frac{(-1)^p}{2} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l I_{l-k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left[I_{l-p} \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^{k'} \pm (-1)^m] \cos(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) + [(-1)^{k'} \mp (-1)^m] \sin(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) \} + \right. \right. \\ \left. \left. + I_{l+p} \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^m \pm (-1)^{k'}] \cos(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) - [(-1)^m \mp (-1)^{k'}] \sin(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) \} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l I_{l+k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left[K_{l+p} \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^m \pm (-1)^{k'}] \cos(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) + [(-1)^m \mp (-1)^{k'}] \sin(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) \} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{l-p} \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^{k'} \pm (-1)^m] \cos(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) - [(-1)^{k'} \mp (-1)^m] \sin(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) \} \right] \right\} \quad (29)$$

Перейдем от преобразованных к новой системе координат сингулярных и регулярных вещественных цилиндрических элементарных решений, полученных для любых значений m , к конкретным их значениям. Тогда сингулярные вещественные цилиндрические элементарные решения для m четных (в выражении (28) берется верхний знак) примут вид

$$\psi_{v,p}^m(\rho, \alpha', \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k=0}^n \frac{Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi)}{1+\delta_{k',0}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l * \\ * \left\{ \Phi_{k',m}^{n,l} \left(\frac{\rho}{v} \right) [(-1)^{k'} + 1] \left[K_{l+p} \left(\frac{r}{v} \right) \cos(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) + K_{l-p} \left(\frac{r}{v} \right) \cos(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) \right] + \right. \\ \left. + \tilde{\Phi}_{k',m}^{n,l} \left(\frac{\rho}{v} \right) [(-1)^{k'} - 1] \left[K_{l+p} \left(\frac{r}{v} \right) \sin(\alpha' + \alpha_0' - p\alpha_0) + K_{l-p} \left(\frac{r}{v} \right) \sin(\alpha' + \alpha_0' + p\alpha_0) \right] \right\} \quad (30)$$

Для m нечетных (в выражении (28) берется нижний знак) запишутся в виде

$$\psi_{\nu,p}^m(\rho, \alpha', \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(\nu) \sum_{k'=0}^n \frac{Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi)}{1+\delta_{k',0}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{1+\delta_{l,0}} * \quad (31)$$

$$* \left\{ \begin{aligned} &\Phi_{k',m}^{n,l}\left(\frac{\rho}{\nu}\right) [1 - (-1)^{k'}] \left[K_{l+p}\left(\frac{r}{\nu}\right) \sin\left(l\alpha' + l\alpha'_0 - p\alpha_0\right) - K_{l-p}\left(\frac{r}{\nu}\right) \sin\left(l\alpha' + l\alpha'_0 + p\alpha_0\right) \right] + \\ &+ \tilde{\Phi}_{k',m}^{n,l}\left(\frac{\rho}{\nu}\right) [1 + (-1)^{k'}] \left[K_{l-p}\left(\frac{r}{\nu}\right) \cos\left(l\alpha' + l\alpha'_0 + p\alpha_0\right) - K_{l+p}\left(\frac{r}{\nu}\right) \cos\left(l\alpha' + l\alpha'_0 - p\alpha_0\right) \right] \end{aligned} \right\}$$

где $\Phi_{k',m}^{n,l}\left(\frac{\rho}{\nu}\right) = \sum_{k''=0}^n \frac{w l^{k'+m}}{2(1+\delta_{k'',0})} P_{k',k''}^n(0) [P_{k'',m}^n(0) + P_{k'',-m}^n(0)] (-1)^{l+k''} [I_{l-k''}\left(\frac{\rho}{\nu}\right) + I_{l+k''}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)]$

$$\tilde{\Phi}_{k',m}^{n,l}\left(\frac{\rho}{\nu}\right) = \sum_{k''=0}^n \frac{w l^{k'+m}}{2} P_{k',k''}^n(0) [P_{k'',m}^n(0) + P_{k'',-m}^n(0)] (-1)^{l+k''} [I_{l-k''}\left(\frac{\rho}{\nu}\right) - I_{l+k''}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)]$$

$$w = \begin{cases} i & \text{при } m - \text{нечетном} \\ 1 & \text{при } m - \text{четном} \end{cases}.$$

2.2 Случай, когда $\rho \geq r$ (рис. 3.)

Выпишем сингулярное вещественное цилиндрическое элементарное решение, записанное в цилиндрической системе координат относительно оси Н, в явном виде:

$$\psi_{\nu,p}^m(\rho, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(\nu) \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+\delta_{k,0}} P_{k,0}^n\left(\frac{\Omega\rho}{\rho}\right) 2 \cos k \phi_p * \quad (32)$$

$$\left\{ F_{k,m}^{n,p}\left(\frac{\rho}{\nu}\right) 4 \cos p \alpha_0 \delta_{k,k_{\text{even}}} + \tilde{F}_{k,m}^{n,p}\left(\frac{\rho}{\nu}\right) 4 \sin p \alpha_0 \delta_{k,k_{\text{odd}}} \right\}$$

где m четное.

Перейдем к сингулярному комплексному цилиндрическому элементарному решению

$$\partial_p^m(\nu, R, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(\nu) \sum_{k=-n}^n \bar{F}_{k,m}^{n,p}\left(\frac{R}{\nu}\right) Y_n^k(\Omega) e^{ip\alpha}, \quad (33)$$

где $Y_n^k(\Omega) = P_{k,0}^n\left(\frac{\Omega\rho}{\rho}\right) e^{ik\phi}$ – сферические гармоники $\bar{F}_{k,m}^{n,p}\left(\frac{R}{\nu}\right) =$

$$i^{m+k} \sum_{k''=-n}^n P_{k,k''}^n(0) P_{m,k''}^n(0) \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{Rch\zeta}{\nu}} [(-1)^k e^{-(p-k'')\zeta} + (-1)^m e^{(p+k'')\zeta}] d\zeta \quad (34)$$

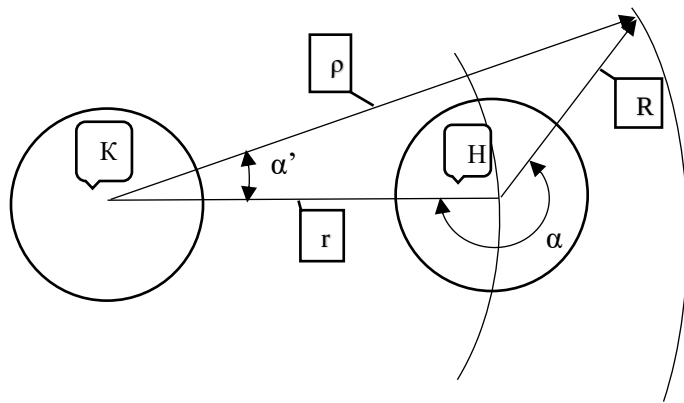


Рис. 3. Координаты и углы для случая, когда $\rho \geq r$

Преобразование сингулярного комплексного элементарного решения (33), как и в предыдущей части, к цилиндрической системе координат, связанной с осью К начнем с преобразования сферических функций $Y_n^k(\Omega)$. Выберем аксиальные пространственные углы α и α' такими, как показано на рис. 3.

Обозначения расстояний R и ρ , углов $\theta, \phi, \theta_1, \theta_2, \phi'$ такие же, как и в разделе 2.1. Углы $\theta, \phi, \theta_1, \theta_2, \phi'$ удовлетворяют условиям (8) в нижней полуплоскости (полуплоскости ниже γ), поэтому для них выполняется теорема сложения

$$Y_n^k(\Omega) = P_{k,0}^n(\cos \theta) e^{ik\phi} = \sum_{k'=-n}^n e^{ik'\phi'} P_{k',0}^n(\cos \theta_2) P_{k',k}^n(\cos \theta_1) (-1)^{k'}. \quad (35)$$

Углы $\theta, (\pi-\phi)$, и $\theta_1, \theta_2, (\pi-\phi)'$ удовлетворяют условиям (8) в верхней полуплоскости (полуплоскости выше γ), поэтому для них выполняется теорема сложения (36), а для углов θ, ϕ , и $\theta_1, \theta_2, \phi'$ она примет вид

$$Y_n^k(\Omega) = P_{k,0}^n(\cos \theta) e^{ik\phi} = \sum_{k'=-n}^n e^{ik'\phi'} P_{k',0}^n(\cos \theta_2) P_{k',k}^n(\cos \theta_1) (-1)^k \quad (36)$$

Раскладывая функции $P_{k',k}^n(\cos \theta_1)$ в экспоненциальный ряд по углам θ_1 по формуле (11), затем подставляя полученное выражение в формулы (35) и (36), запишем полученное выражение в виде одной формулы

$$Y_n^k(\theta_1, \phi) = \sum_{k'=-n}^n e^{ik'\phi'} P_{k',0}^n(\cos \theta_2) i^{k'+k} \sum_{l'=-n}^n e^{il'\theta_1} P_{k',l'}^n(0) P_{l',k}^n(0) \begin{bmatrix} (-1)^k \\ (-1)^{k'} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Возвращаемся к сингулярному комплексному цилиндрическому элементарному решению (33) и просуммируем сумму по k . Наши преобразования будут повторять уже сделанные (см. формулы (14)–(20)) с той только разницей, что множитель в квадратных скобках выражения (37) переворачивается, т.е. нижний номер стоит вверху, а верхний – внизу. С учетом этих изменений преобразованное сингулярное комплексное цилиндрическое элементарное решение примет вид

$$\partial_p^m(v, R, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k=-n}^n Y_n^{k'}(\theta_2, \phi') i^{k'+m} \sum_{k''=-n}^n P_{m,k''}^n(0) P_{k',k''}^n(0) * \\ * \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{Rch\zeta}{v}} \left[\begin{matrix} (-1)^{k'} e^{-(p-k'')\zeta} e^{-ik''\theta_1} + (-1)^m e^{(p+k'')\zeta} e^{ik''\theta_1} \\ (-1)^{k'} e^{-(p-k'')\zeta} e^{ik''\theta_1} + (-1)^m e^{(p+k'')\zeta} e^{-ik''\theta_1} \end{matrix} \right] d\zeta e^{ip\alpha} \quad (38)$$

По формулам (7) перейдем к сингулярному вещественному цилиндрическому элементарному решению $\psi_{v,p}^m(R, \alpha, \Omega) =$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k'=0}^n \frac{1}{1+\delta_{k',0}} Y_n^{k'}(\theta_2, \phi') \sum_{k''=0}^n \frac{i^{k'+m}}{1+\delta_{k'',0}} P_{k',k''}^n(0) [P_{k'',m}^n(0) + P_{k'',-m}^n(0)] * \\ \frac{1}{2} \left\{ K_{p-k''} \left(\frac{R}{v} \right) \left[(-1)^{k'} e^{i(p-k'')\theta_1} \pm (-1)^m e^{-i(p-k'')\theta_1} \right] + K_{p+k''} \left(\frac{R}{v} \right) \left[(-1)^m e^{i(p+k'')\theta_1} \pm (-1)^{k'} e^{-i(p+k'')\theta_1} \right] \right\} e^{ip\alpha} \quad (39)$$

В верхней полуплоскости (рис. 3.) $\alpha = \pi + \theta_1 + \alpha'$; в нижней – $\alpha = \alpha' - \pi - \theta_1$. Подставляя значения α в выражение, заключенное в квадратных скобках формулы (39), после ряда несложных преобразований получим

$$(-1)^p \left\{ K_{p-k''} \left(\frac{R}{v} \right) \left[\begin{matrix} (-1)^{k'} e^{i(p-k'')\theta_1 + ip\alpha'_1} \pm (-1)^m e^{-i(p-k'')\theta_1 - ip\alpha'_1} \\ (-1)^{k'} e^{-i(p-k'')\theta_1 + ip\alpha'_1} \pm (-1)^m e^{i(p-k'')\theta_1 - ip\alpha'_1} \end{matrix} \right] + \right. \\ \left. + K_{p+k''} \left(\frac{R}{v} \right) \left[\begin{matrix} (-1)^m e^{i(p+k'')\theta_1 + ip\alpha'_1} \pm (-1)^{k'} e^{-i(p+k'')\theta_1 - ip\alpha'_1} \\ (-1)^m e^{-i(p+k'')\theta_1 + ip\alpha'_1} \pm (-1)^{k'} e^{i(p+k'')\theta_1 - ip\alpha'_1} \end{matrix} \right] \right\} \quad (40)$$

Используя теорему сложения для модифицированных функций Бесселя третьего рода [4,5] для верхней полуплоскости при $\rho \geq r$ и $\frac{R^2}{v^2} = \frac{r^2}{v^2} + \frac{\rho^2}{v^2} - 2 \frac{r\rho}{v^2} \cos \alpha'$:

$$K_d \left(\frac{R}{v} \right) e^{\pm i d \alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{d+k} \left(\frac{\rho}{v} \right) I_k \left(\frac{r}{v} \right) e^{\pm i k \alpha'} \quad (41)$$

для нижней полуплоскости при $\rho \geq r$ и $\frac{R^2}{v^2} = \frac{r^2}{v^2} + \frac{\rho^2}{v^2} - 2 \frac{r\rho}{v^2} \cos(2\pi - \alpha')$:

$$K_d \left(\frac{R}{v} \right) e^{\pm i d \alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{d+k} \left(\frac{\rho}{v} \right) I_k \left(\frac{r}{v} \right) e^{\pm i k (2\pi - \alpha')} \quad (42)$$

выражение (40) преобразуется после ряда преобразований к виду

$$* (-1)^p \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} I_{l-p} \left(\frac{r}{v} \right) \left[K_{l-k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left(\frac{\rho}{v} \right) \{ [(-1)^{k'} \pm (-1)^m] \cos l \alpha' + [(-1)^{k'} \mp (-1)^m] i \sin l \alpha' \} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{l+k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^m \pm (-1)^{k'}] \cos l \alpha' + [(-1)^m \mp (-1)^{k'}] i \sin l \alpha' \} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} I_{l+p} \left(\frac{r}{v} \right) \left[K_{l-k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left(\frac{\rho}{v} \right) \{ [(-1)^m \pm (-1)^{k'}] \cos l \alpha' - [(-1)^m \mp (-1)^{k'}] i \sin l \alpha' \} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{l+k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left(\frac{\rho}{v} \right) \{ [(-1)^{k'} \pm (-1)^m] \cos l \alpha' - [(-1)^{k'} \mp (-1)^m] i \sin l \alpha' \} \right] \right\} \quad (43)$$

Подставив (43) в формулу для сингулярного комплексного цилиндрического элементарного решения (39), получим

$$\psi_{v,p}^m(R, \alpha, \Omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \delta_{k',0}} Y_n^{k'}(\theta_2, \Phi) \sum_{k''=0}^n \frac{i^{k'+m}}{1 + \delta_{k'',0}} P_{k',k''}^n(0) [P_{k'',m}^n(0) + P_{k'',-m}^n(0)] * \\ * (-1)^p \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} I_{l-p} \left(\frac{r}{v} \right) \left[K_{l-k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left(\frac{\rho}{v} \right) \{ [(-1)^{k'} \pm (-1)^m] \cos l \alpha' + [(-1)^{k'} \mp (-1)^m] i \sin l \alpha' \} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{l+k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left(\frac{r}{v} \right) \{ [(-1)^m \pm (-1)^{k'}] \cos l \alpha' + [(-1)^m \mp (-1)^{k'}] i \sin l \alpha' \} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} I_{l+p} \left(\frac{r}{v} \right) \left[K_{l-k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left(\frac{\rho}{v} \right) \{ [(-1)^m \pm (-1)^{k'}] \cos l \alpha' - [(-1)^m \mp (-1)^{k'}] i \sin l \alpha' \} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{l+k''} \left(\frac{\rho}{v} \right) \left(\frac{\rho}{v} \right) \{ [(-1)^{k'} \pm (-1)^m] \cos l \alpha' - [(-1)^{k'} \mp (-1)^m] i \sin l \alpha' \} \right] \right\} \quad (44)$$

Формула (44) выписана для произвольных значений l, p, k', m' . Нам же потребуется выражение для вещественного сингулярного цилиндрического элементарного решения с l -четными, $k'=0$, p - и m -произвольными. Выпишем его в явном виде

$$\psi_{v,p}^l(\rho, \alpha, \Omega) = \left[\sum_{n=l}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^l(v) \sum_{m'=0,2}^n \frac{1}{1 + \delta_{m',0}} F_{m',l}^{n,0} \left(\frac{\rho}{v} \right) 2Y_n^{m'}(\Omega) \right] (-1)^p I_p \left(\frac{r}{v} \right), \quad (45)$$

$$\text{где } F_{m',l}^{n,0} \left(\frac{\rho}{v} \right) = \sum_{l''=0}^n \frac{i^{l+m'}}{1 + \delta_{l'',0}} P_{m',l''}^n(0) [P_{l'',l}^n(0) + P_{l'',-l}^n(0)] K_{l''} \left(\frac{\rho}{v} \right)$$

Заключение

Итак, в данной работе предложен путь распространения метода поверхностных псевдоисточников на сложные конструкции современных ядерных реакторов путем преобразования функций Грина к различным цилиндрическим системам координат. Реализация такого подхода ранее была выполнена для расчета кластерных ячеек РБМК по программе КЛАРА (рис. 1.) [6,7] с последующим использованием его в трехмерных расчетах всего реактора РБМК [8]. Преимущество данного подхода перед методом вероятностей первого столкновения, метода дискретных ординат можно найти в работе [9].

Список литературы

1. Лалетин Н.И. Метод поверхностных псевдоисточников для решения уравнения нейтронов (G_n -приближения). – Кн: Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов, 1974, Москва, Атомиздат, с.187–215,
2. Султанов Н.В. Двумерная функция Грина уравнения переноса нейтронов в цилиндрической геометрии // ВАНТ Сер.: Физика ядерных реакторов, вып. 5, 2018, сс. 40–52.
3. Султанов Н.В. Построение двумерных элементарных решений уравнения переноса нейтронов в цилиндрической геометрии // ВАНТ Сер.: Физика ядерных реакторов, вып. 5, 2018, сс. 24–39.

4. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. М., Физматгиз, 1963.
6. *Султанов Н.В.* Уточнение метода поверхностных псевдоисточников для расчета кластерных ячеек РБМК // Атомная энергия 2016. Т. 121. Вып. 2. С. 66–71.
7. *Султанов Н.В.* Многогрупповой расчет кластерных ячеек методом поверхностных псевдоисточников // Атомная энергия. 1985. Т. 58. Вып. 6. С. 414–418.
8. *Балыгин А.А., Гольцев А.О., Ковалишин А.А., Краюшкин А.В., Лалетин И.Н., Султанов Н.В., Тишкин Ю.А.* Применение метода поверхностных гармоник в программе СТЕПАН // Атомная энергия. 2014. Т. 85. Вып. 3. С. 186–193.
9. *Лалетин И.И.* Сравнение метода поверхностных псевдоисточников (G_N -приближения) с другими методами численного решения уравнения переноса нейтронов // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. № 9. С. 111–124.